

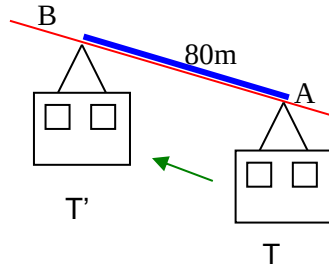
CHAPITRE 3 – Les vecteurs 1^{ère} partie

I-Définitions et premières propriétés

1. Notion de translation :

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (jusqu'à 7mns)

Exemple :



Une translation est un glissement :

- avec une direction donnée :
câble du téléphérique, la droite (AB),
- avec un sens donné :
le téléphérique monte de A vers B,
- avec une longueur donnée : 80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T' est l'image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

2. Notion de vecteurs :

Définition :

Définition :

Soit t la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.

Les couples de points (A ; A'), (B ; B') et (C ; C') définissent un

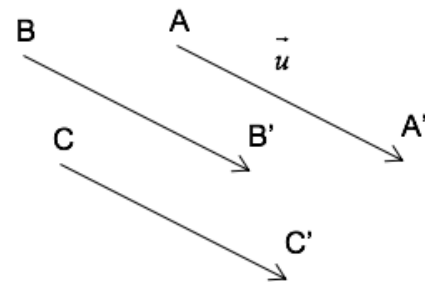
vecteur caractérisé par :

- une **direction** : celle de la droite (AA'),
- un **sens** : de A vers A',
- une **longueur** : la longueur AA'.

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.

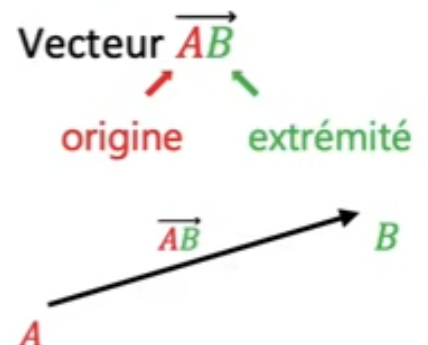
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\vec{u}$. $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des **représentants** de $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$



Remarques :

- On dit que deux vecteurs ont la même direction lorsque les droites qui portent ces vecteurs sont parallèles.
- La **longueur** d'un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur. La **norme** ou **longueur** d'un vecteur $\vec{u}$ est notée : $\|\vec{u}\|$.
- Notion d'origine et d'extrémité :



Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 11^{ème} à la 12^{ème} minute)

- Un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondus est appelé vecteur **nul** et est noté $\vec{0}$

Exemple : $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$

Lire mais ne pas rédiger !!!



« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)

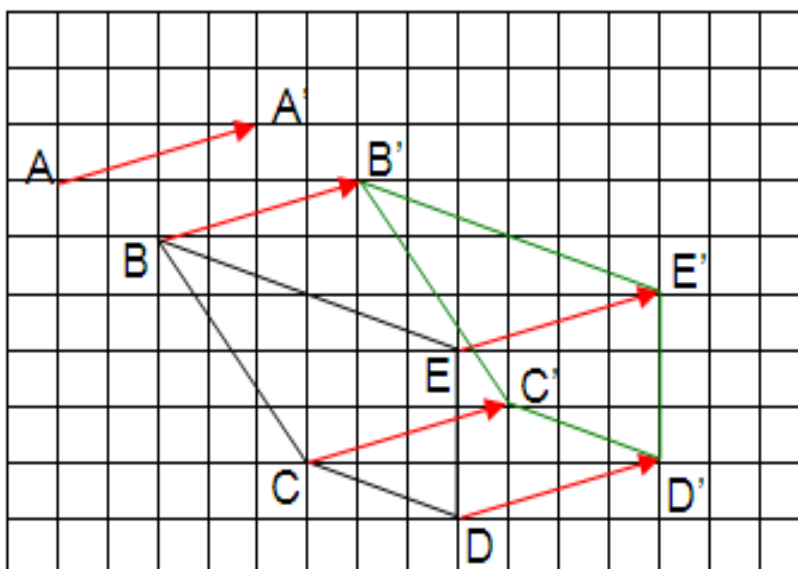
Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\vec{AB}$ en 1920. A l'origine des vecteurs, un italien, **Giusto Bellavitis** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

Méthode : Construire l'image d'une figure par une translation

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs2 (3mns54s)

Soit t la translation de vecteur $\vec{AA'}$

Construire l'image $B'C'D'E'$ du trapèze $BCDE$ par la translation t .

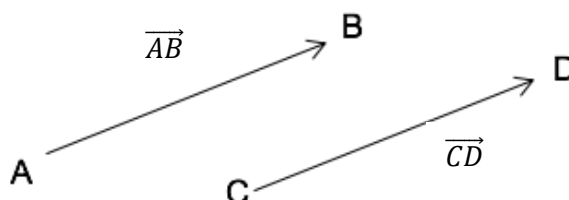


3. Egalité de vecteurs :

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 7^{ème} à la 10^{ème} minute)

Exemple : Ci-dessous, on peut poser : $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$.

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



Définition :

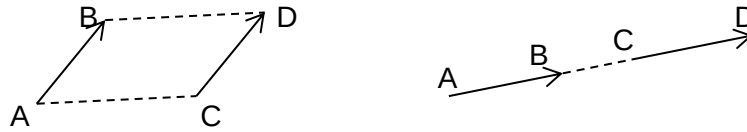
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont **même direction**, **même sens** et **même longueur**.

On note $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Propriété du parallélogramme :

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère **ABDC** est un **parallélogramme**, éventuellement aplati.

**Démonstration : lire mais ne pas noter**

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ayant même direction, les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles. Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.
- Réciproquement : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, définis à l'aide des segments [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABDC, sont égaux.

Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

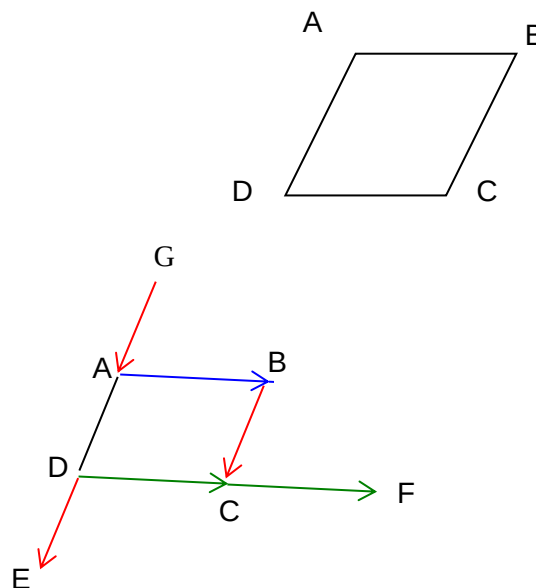
Vidéo : mathssa.fr/vecteurs3 (5mns44s)

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$$

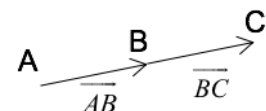
$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BC}$$



Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 10^{ème} à la 11^{ème} minute)

Propriété du milieu :

Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



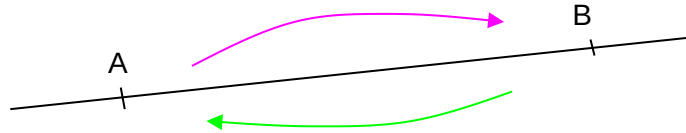
4. Vecteurs opposés ::

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 12^{ème} à la 13^{ème} minute)

Rappel : il ne faut pas confondre sens et direction !

Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).

Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».



Définition :

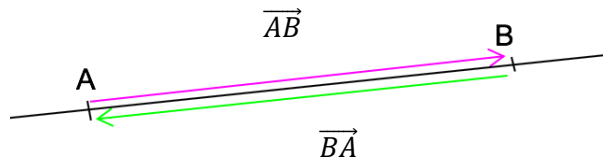
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même **direction**, la même **longueur** et qu'ils sont de sens **contraires**.

$\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont des vecteurs opposés.

On note $\vec{BA} = -\vec{AB}$

$\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont des vecteurs opposés.

On note $\vec{BA} = -\vec{AB}$



5. Exercice type : utiliser les égalités vectorielles

Lien vidéo: mathssa.fr/vecteurs4 (4 minutes 34s)

Enoncé : ABCD et AFBD sont deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.

2. Démontrer que B est le milieu du segment [CF].

Dire que B est le milieu du segment [AC], revient à dire que $\vec{AB} = \vec{BC}$.

Propriété du parallélogramme :
Dire que $\vec{AB} = \vec{CD}$, revient à dire que ABDC est un parallélogramme.

• ABCD est un parallélogramme, donc :
 $\vec{CB} = \vec{DA}$

• AFBD est un parallélogramme, donc :
 $\vec{BF} = \vec{DA}$

• Donc $\vec{CB} = \vec{BF}$
On en déduit que B est le milieu de [CF].

m@ths
et
tiques

II–Somme , différence de vecteurs et produit par un réel

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (à partir de la 14ème minute jusqu'à la 23mns45s)

1.Somme de vecteurs

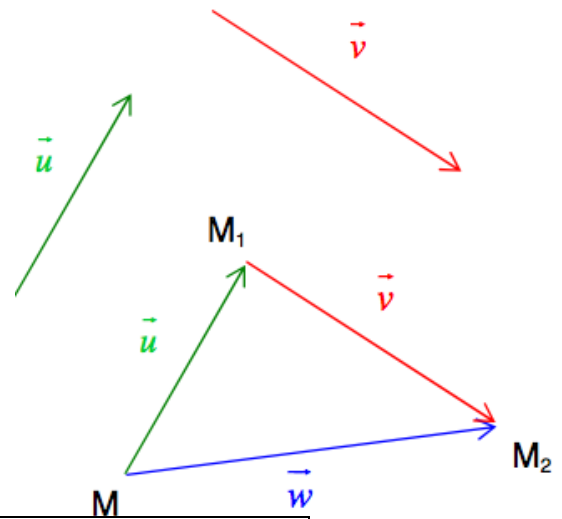
Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$$M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2$$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

$$M \xrightarrow{t} M_2$$



Propriété :

La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

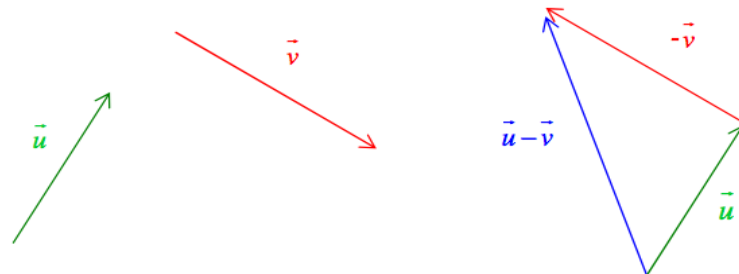
Propriété :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs quelconques.

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

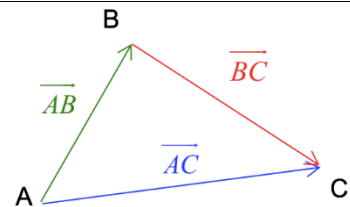


2.Une relation fondamentale

Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 20ème à la 22ème minute)

La relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

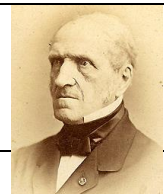


Remarque : Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

Lire mais ne pas noter

Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.

Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César,...) !



Méthode : Appliquer la relation de Chasles

Vidéo : mathssa.fr/vecteurs5 (6mns10s)

Simplifier les écritures :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$

e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
 $= \overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$
 $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$
 $= \overrightarrow{AP}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
 $= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK}$
 $= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK}$
 $= \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
 $= \overrightarrow{MM}$
 $= \vec{0}$

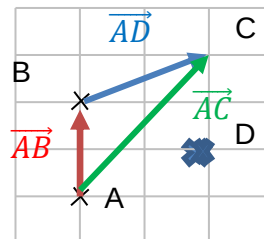
e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$
 $= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$
 $= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$
 $= \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$
 $= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$
 $= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK}$
 $= \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

Exercice : Soit A, B et D trois points.

construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

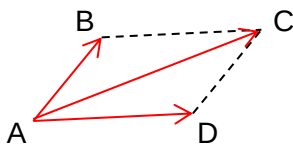
Il semble que ABCD soit un parallélogramme



Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (de la 22^{ème} à la 24^{ème} minute)

Propriété caractéristique du parallélogramme :

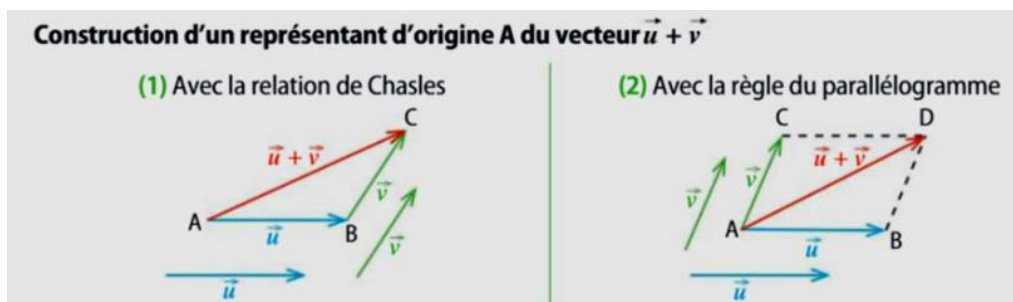
Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



Démonstration : ne pas écrire

D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ peut s'écrire :

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, soit encore : ABCD est un parallélogramme.



Remarque : pour construire une somme de deux vecteurs soit :

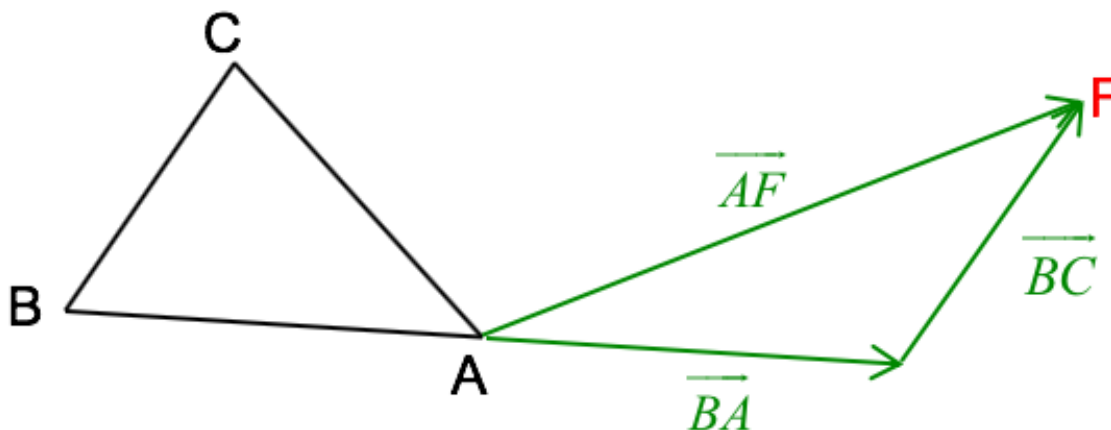
- Soit on place les vecteurs bout à bout
- Soit on les représente à partir de la même origine et on construit un parallélogramme

Méthode : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

vidéo : mathssa.fr/vecteurs6 (3mns42s)

Soit un triangle ABC.

Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



On construit à partir de A (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. On a ainsi construit un vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point F .

3. Produit d'un vecteur par un réel

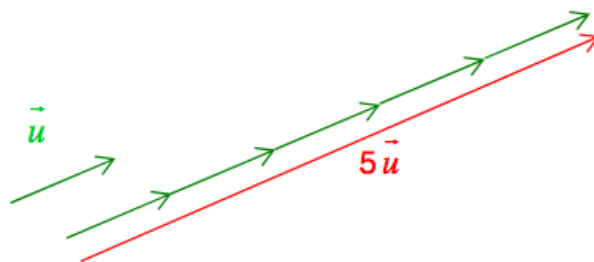
Lien vidéo : mathssa.fr/vecteurs (à partir de 23mns45s jusqu'à 26minutes 56s) et mathssa.fr/vecteurs17

Exemple :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$$



Remarques :

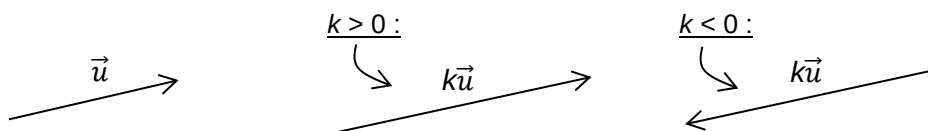
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et k un nombre réel non nul.

On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel k , le vecteur noté $k\vec{u}$:

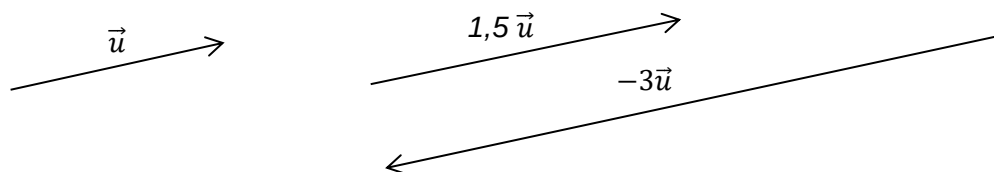
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$,
- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si $k > 0$,
 $-k$ fois norme de $\vec{u}$ si $k < 0$.



Remarques :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

Exemples :



Les vecteurs $\vec{u}$, $1,5\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.

$\vec{u}$ et $1,5\vec{u}$ sont de même sens. $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.

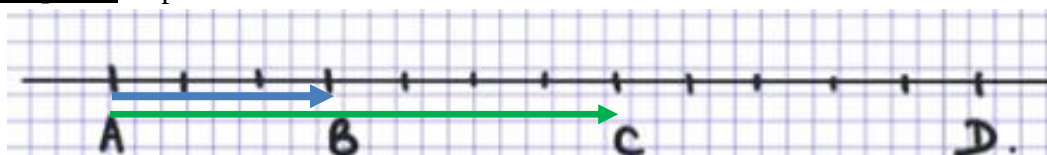
La norme du vecteur $1,5\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.

La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

Point méthode : calcul du coefficient k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

1. identifier le signe de k (vecteurs de même sens $k > 0$ sinon $k < 0$)
2. en comparant les normes , trouver la valeur absolue de k .

Exemple 1 : Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$

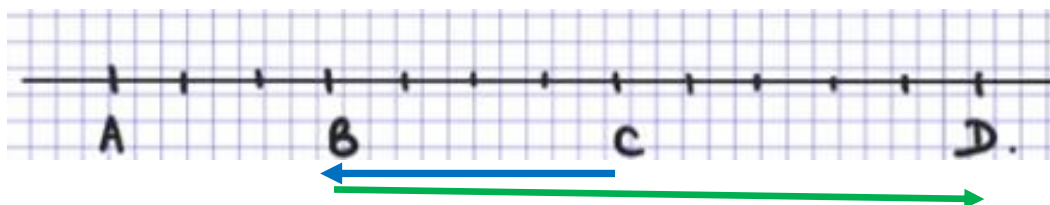


Les vecteurs ont le même sens donc $k > 0$

$$\begin{aligned} \|\vec{AC}\| &= 7 \\ \|\vec{AB}\| &= 3 \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \times \frac{3}{7} \end{array} \quad k = \frac{3}{7}$$

$$\vec{AB} = \frac{3}{7} \vec{AC}$$

Exemple 2 : Exprimons le vecteur $\vec{BD}$ en fonction du vecteur $\vec{CB}$



Les vecteurs n'ont pas le même sens donc $k < 0$

$$\begin{aligned} \|\vec{CB}\| &= 4 \\ \|\vec{BD}\| &= 9 \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \times \frac{9}{4} \end{array} \quad k = -\frac{9}{4}$$

$$\vec{BD} = -\frac{9}{4} \vec{CB}$$

Propriétés :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques. k et k' deux réels quelconques

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Exemples :

$$2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$2\vec{u} - 5\vec{u} = (2 - 5)\vec{u} = -3\vec{u}$$

$$2(-5\vec{u}) = (2 \times (-5))\vec{u} = -10\vec{u}$$

Exercice : Ecrire plus simplement : $2(-3\vec{u} + 5\vec{v}) - 4(\vec{u} - 2\vec{v})$

$$2(-3\vec{u} + 5\vec{v}) - 4(\vec{u} - 2\vec{v}) = -6\vec{u} + 10\vec{v} - 4\vec{u} + 8\vec{v}$$

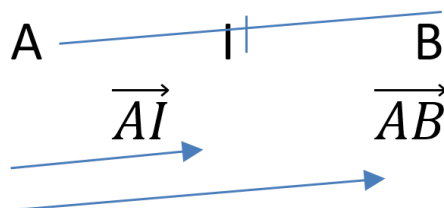
$$= -6\vec{u} - 4\vec{u} + 10\vec{v} + 8\vec{v}$$

$$= -10\vec{u} + 18\vec{v}$$

Propriétés :

I est le milieu du segment [AB] si et seulement si

$$\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$



4. Construction de points définis par une relation vectorielle

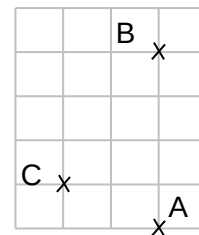
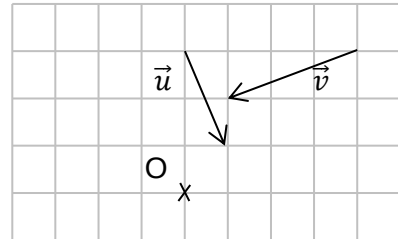
Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle **vidéo** : mathssa.fr/vecteurs7
(4mns12s)

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.

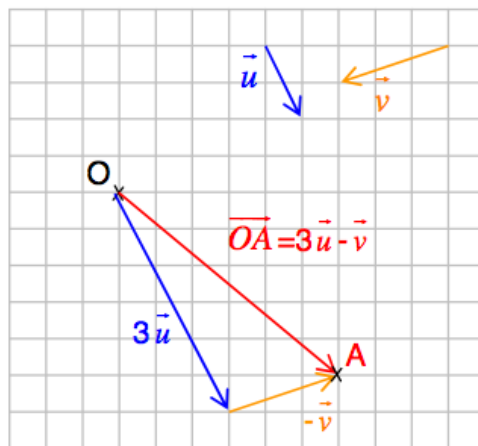
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

2) Soit trois points A, B, C du plan.

Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.



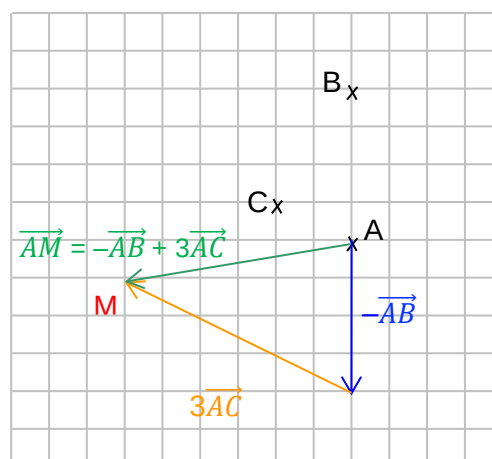
1)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$, on place bout à bout à partir du point O les vecteurs $3\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

Le point A se trouve à l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$ dans « le chemin » de vecteurs ainsi construit.

2)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, on place bout à bout à partir de A les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AC}$.

Le point M se trouve à l'extrémité du vecteur $3\overrightarrow{AC}$ dans « le chemin » de vecteurs ainsi construit.

