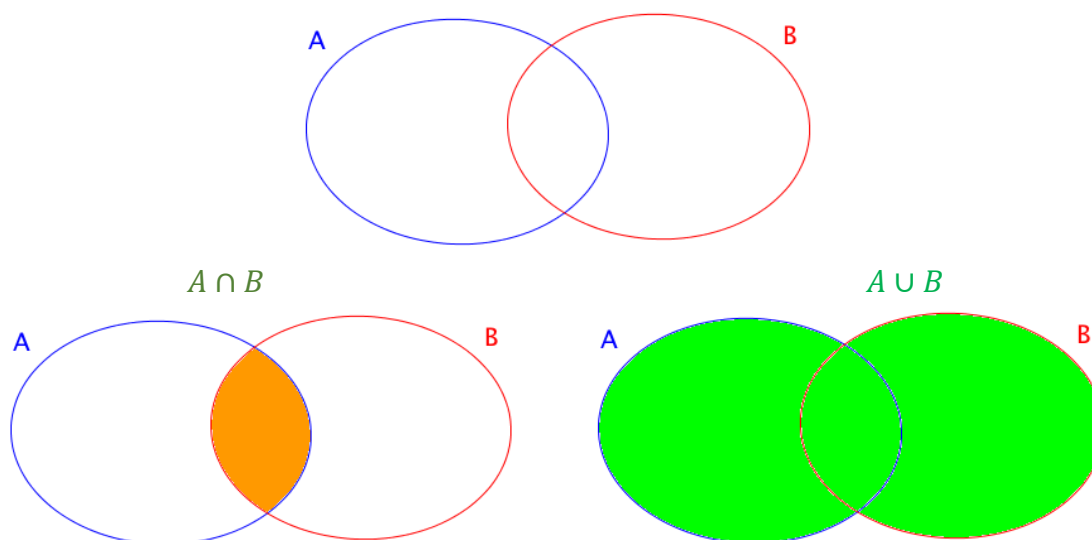


Chapitre 4 : compléments sur les intervalles et sur l'ordre

I- Intersection et réunion d'intervalles-intervalle complémentaire

Rappels du chapitre 2

INÉGALITÉ	INTERVALLE	REPRÉSENTATION
$2 \leq x \leq 4$	$[2; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] -1; 3]$	
$x < 2$	$]-\infty; 2[$	
$1 \leq x$	$[1; +\infty[$	



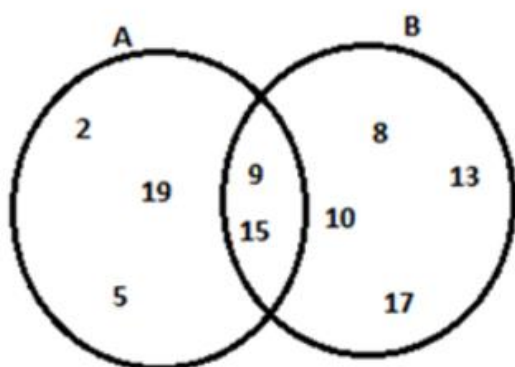
Notation - définition :

Soit A et B deux ensembles.

L'**intersection** de A et de B notée $A \cap B$ est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A **et** à B.

La **réunion** de A et de B notée $A \cup B$ est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A **ou** à B.

Remarque : c'est un « ou » non exclusif. L'intersection de A et de B fait partie de la réunion des ensembles A et B.



$$A \cap B = \{9; 15\}$$

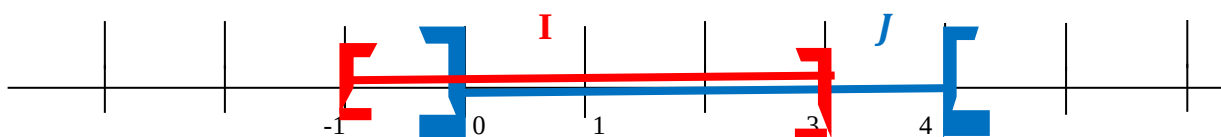
$$A \cup B = \{2; 5; 19; 9; 15; 8; 10; 13; 17\}$$

Point méthode : intersection et réunion d'intervalles

- Sur la droite des réels, on représente d'une couleur l'intervalle I et d'une autre couleur l'intervalle J.
- On repère les abscisses des points colorés deux fois : on obtient ainsi $I \cap J$
- On repère les abscisses des points colorés au moins une fois : on obtient $I \cup J$

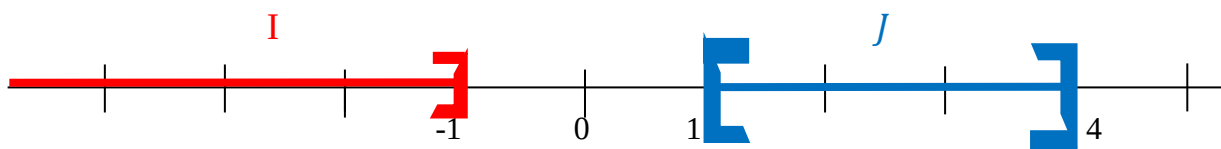
Application 1 : vidéo : mathssa.fr/interv3 (5mns)

1. $I = [-1 ; 3]$ et $J =]0 ; 4[$ Déterminer $I \cap J$.



$I \cap J =]0 ; 3[$ (0 est dans I mais pas dans J. Il n'est donc pas dans l'intersection contrairement à 3)

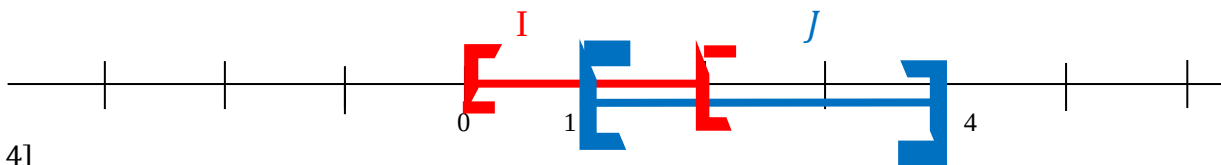
2. $I =]-\infty ; -1]$ et $J = [1 ; 4]$ Déterminer $I \cap J$



$I \cap J = \emptyset$ (ensemble vide) (aucune abscisse n'est colorée 2 fois)

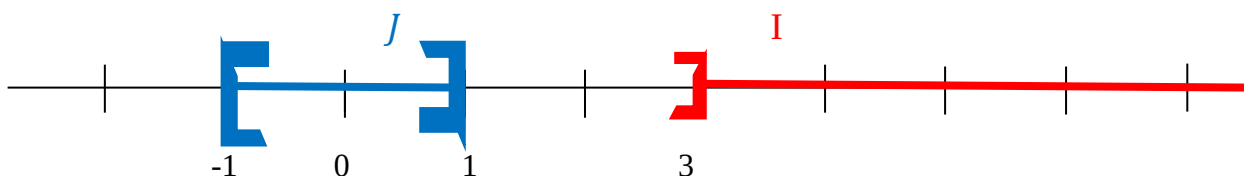
Application 2 : vidéo : mathssa.fr/interv4 (5mns)

1. $I = [0 ; 2[$ et $J = [1 ; 4]$ Déterminer $I \cup J$.

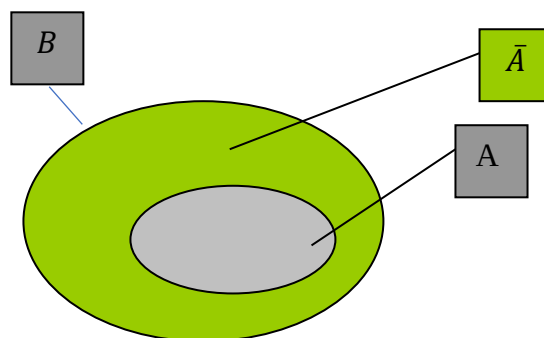


$I \cup J = [0 ; 4]$

2. $I =]3 ; +\infty[$ et $J = [-1 ; 1]$ Déterminer $I \cup J$.



$I \cup J = [-1 ; 1] \cup]3 ; +\infty[$ Pour s'entraîner : mathssa.fr/wimsinterv

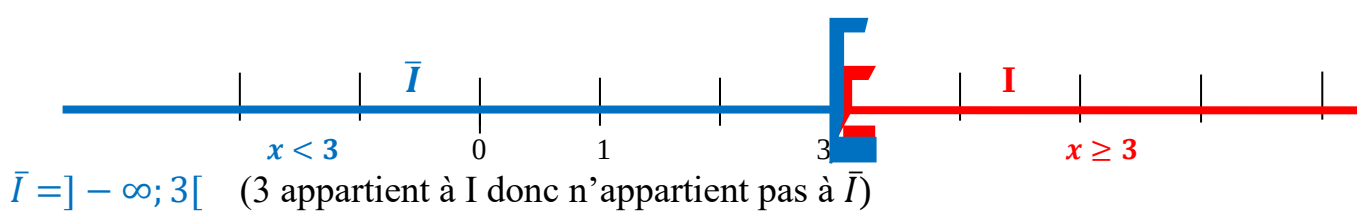
**Notation - définition :**

Soit A et B deux ensembles avec A inclus dans B.

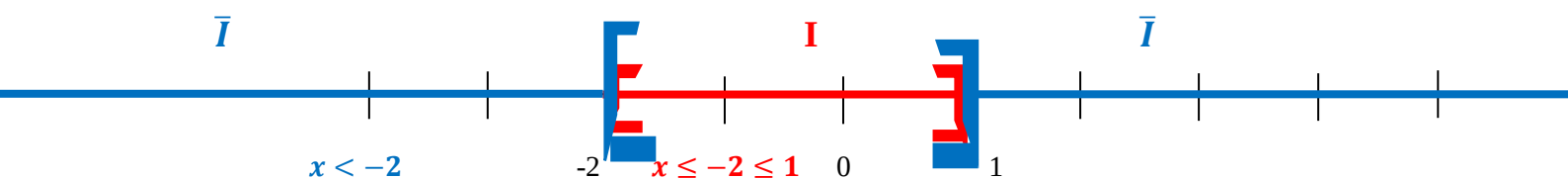
Le **complémentaire** de A dans B noté $\bar{A}$ est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à B **mais pas** à A.

Application :

1. $I = [3; +\infty[$. Déterminer $\bar{I}$. (le complémentaire de I dans $\mathbb{R}$)



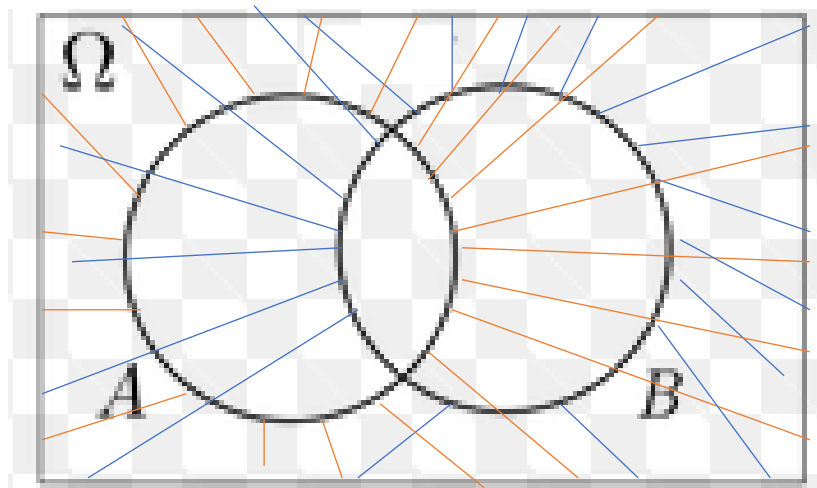
2. $I = [-2; 1]$ Déterminer $\bar{I}$.



Complément : Soit A et B deux ensembles :

Compléter :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



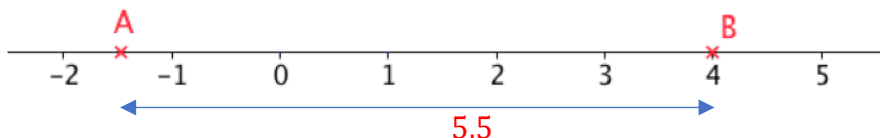
II-Résolution d'équations et d'inéquations à l'aide de la valeur absolue :

Définition : (rappel)

Soit a et b deux réels représentés par les points A et B sur la droite des réels.
La distance de a à b notée $d(a, b)$ est la distance AB.

Propriété : $d(a, b) = |a - b|$

Exemple : $d(-1,5, 4) = |-1,5 - 4| = |-5,5| = 5,5$



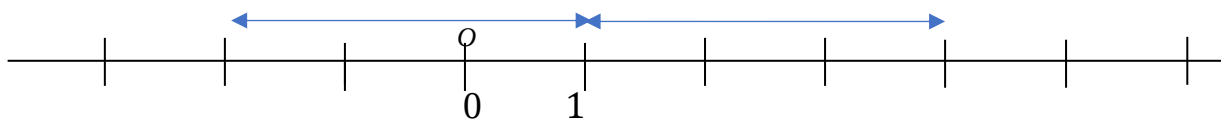
Entrainement : mathssa.fr/wimsvlabs et mathssa.fr/wimsvlabs2

Point méthode :

- On représentera la droite des réels
- On écrira les valeurs absolues sous la forme de distance entre 2 réels
- On résoudra le problème géométrique
- On écrira ensuite l'ensemble des solutions.

Application: vidéos : mathssa.fr/valabs3 (12mns) mathssa.fr/valabs4 (5mns) et mathssa.fr/valabs5 (7mns20s)

1.Déterminer tous les réels x tels que $|x - 1| = 3$

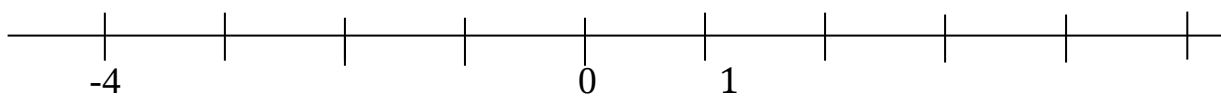


$|x - 1| = 3$ équivaut à $d(x, 1) = 3$

équivaut à $x = -2$ ou $x = 4$

L'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-2 ; 4\}$

2. Déterminer tous les réels x tels que $|x - 1| = |x + 4|$

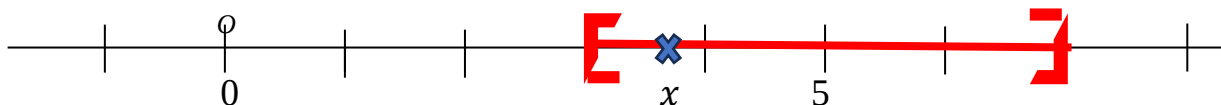


$|x - 1| = |x + 4|$ équivaut à $d(x, 1) = d(x, -4)$

équivaut à $x = \frac{1+(-4)}{2} = -1,5$

L'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-1,5\}$

3.Déterminer tous les réels x tels que $|x - 5| \leq 2$

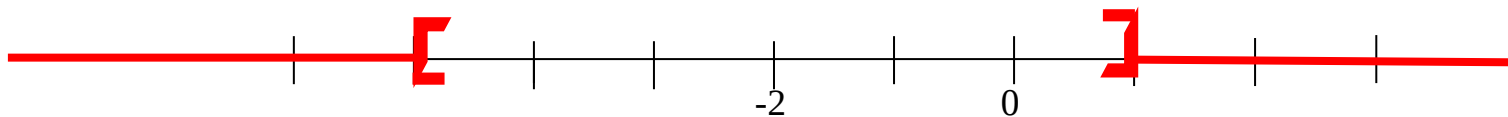


$|x - 5| \leq 2$ équivaut à $d(x, 5) \leq 2$

équivaut à $3 \leq x \leq 7$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S = [3 ; 7]$

4. Déterminer tous les réels x tels que $|x + 2| > 3$



$|x + 2| > 3$ équivaut à $d(x, -2) > 3$
équivaut à $x < -5$ ou $x > 1$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S =]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[$

Entraînement : mathssa.fr/wimsvalabs3, mathssa.fr/wimsvalabs4, mathssa.fr/wimsvalabs5

III-Rappels sur l'ordre

1. Propriété fondamentale :

Propriété :

Soit a et b deux réels.

$a < b$ équivaut à $a - b < 0$

$a > b$ équivaut à $a - b > 0$

$a = b$ équivaut à $a - b = 0$

Point méthode : pour comparer deux nombres, il suffit d'étudier le signe de leur différence.

Exercice :

1. Comparer sans calculatrice $A = \frac{16}{21}$ et $B = \frac{3}{4}$.

$$A - B = \frac{16}{21} - \frac{3}{4} = \frac{16 \times 4}{21 \times 4} - \frac{3 \times 21}{4 \times 21} = \frac{64}{84} - \frac{63}{84} = \frac{1}{84}$$

$\frac{1}{84} > 0$ On en déduit que $A - B > 0$.

Par conséquent $A > B$.

2. Comparer en justifiant $A = 1,4^{n+1}$ et $B = 1,4^n$. (n est un entier naturel)

$$A - B = 1,4^{n+1} - 1,4^n = 1,4^n \times 1,4 - 1,4^n \times 1 = 1,4^n \times (1,4 - 1) = 1,4^n \times 0,4$$

Or $1,4^n > 0$ et $0,4 > 0$. On en déduit que $1,4^n \times 0,4 > 0$

On en déduit que $A - B > 0$.

Par conséquent $A > B$.

3. on suppose que $x \in]1; +\infty[$. Comparer en justifiant $A = \frac{2x+3}{x-1}$ et $B = 2$.

$$A - B = \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2}{1} = \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2 \times (x-1)}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2x+3-(2x-2)}{x-1} = \frac{2x+3-2x+2}{x-1} = \frac{5}{x-1}$$

$5 > 0$

$x - 1 > 0$ car $x > 1$

$\frac{5}{x-1} > 0$ On en déduit que $A - B > 0$.

Par conséquent $A > B$.

Défi : comparer $A = \frac{1\,000\,000\,003}{1\,000\,000\,001}$ et $B = \frac{1\,000\,000\,001}{999\,999\,999}$

On peut penser à l'aide de la calculatrice que $A=B$.

On pose $x = 1000\,000\,001$. $A = \frac{x+2}{x}$ et $B = \frac{x}{x-2}$

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} - \frac{x^2}{x(x-2)} \\ &= \frac{x^2-4}{x(x-2)} - \frac{x^2}{x(x-2)} \\ &= \frac{x^2-4-x^2}{x(x-2)} \\ &= \frac{-4}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$-4 < 0$ $x > 0$ et $x - 2 > 0$. On en déduit que $\frac{-4}{x(x-2)} < 0$

On en déduit que $A-B < 0$. Par conséquent $A < B$.

2. Opérations sur les inégalités - applications

Propriété : addition d'un réel

Soit a, b et c trois réels.

Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

(on peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans changer le sens de l'inégalité)

Exemple : on sait que $3,14 < \pi < 3,15$.

$$\text{donc } 3,14 - 3 < \pi - 3 < 3,15 - 3$$

$$\text{soit } 0,14 < \pi - 3 < 0,15$$

Propriété : multiplication par un réel

Soit a, b et c trois réels.

Si $a \leq b$ et si $c > 0$ alors $a \times c \leq b \times c$

(on peut multiplier ou diviser une inégalité par un nombre positif sans changer le sens de l'inégalité)

Si $a \leq b$ et si $c < 0$ alors $a \times c \geq b \times c$

(on peut multiplier ou diviser une inégalité par un nombre négatif mais l'inégalité change de sens)

Exercice d'application : On sait que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. En déduire un encadrement pour chacun des nombres suivants : $2\sqrt{2}$; $2 - 10\sqrt{2}$.

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$2 \times 1,41 < 2 \times \sqrt{2} < 2 \times 1,42$$

$$2,82 < 2\sqrt{2} < 2,84$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$-10 \times 1,41 > -10 \times \sqrt{2} > -10 \times 1,42$$

$$-14,1 > -10\sqrt{2} > -14,2$$

$$-14,1 + 2 > -10\sqrt{2} + 2 > -14,2 + 2$$

$$-12,1 > -10\sqrt{2} + 2 > -12,2$$

$$-12,2 < -10\sqrt{2} + 2 < -12,1$$

Application 1 :

On suppose que $x \in]-4 ; 3]$. Déterminer à quel intervalle appartient $-3x + 7$?

$x \in]-4 ; 3]$ équivaut à $-4 < x \leq 3$

équivaut à $-3 \times (-4) > -3 \times x \geq -3 \times 3$ (on multiplie par $(-3) < 0$!!!!!!!)

équivaut à $12 > -3x \geq -9$

équivaut à $12 + 7 > -3x + 7 \geq -9 + 7$

équivaut à $19 > -3x + 7 \geq -2$

équivaut à $-2 \leq -3x + 7 < 19$

équivaut à $-3x + 7 \in [-2; 19[$

Application 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x + 12 \leq 0$.

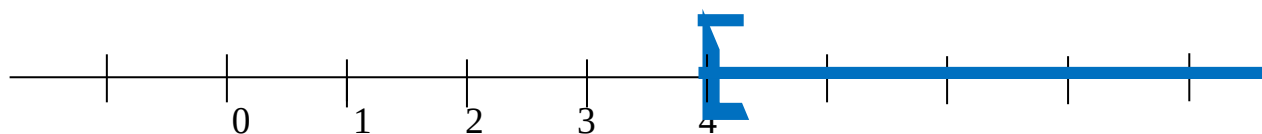
$$-3x + 12 \leq 0$$

équivaut à $-3x + 12 - 12 \leq 0 - 12$

équivaut à $-3x \leq -12$

équivaut à $\frac{-3x}{-3} \geq \frac{-12}{-3}$ (on divise par $(-3) < 0$!!!!!!!)

équivaut à $x \geq 4$



L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S = [4 ; +\infty[$

Application 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x - 7 < -4x + 8$.

$$2x - 7 < -4x + 8$$

équivaut à $2x + 4x - 7 < -4x + 4x + 8$

équivaut à $6x - 7 < 8$

équivaut à $6x - 7 + 7 < 8 + 7$

équivaut à $6x < 15$

équivaut à $\frac{6x}{6} < \frac{15}{6}$

équivaut à $x < 2,5$



L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S =]-\infty ; 2,5[$