

Chapitre 5: les fonctions 1^{ère} partie

Exercice d'introduction :

Soit le programme de calcul :

Programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Enlever 1
- Multiplier par 4
- Ajouter le nombre de départ
- Ajouter 6

1. Si on entre le nombre 10 , quel nombre obtient-on en sortie ?

$$10 \rightarrow 9 \rightarrow 36 \rightarrow 46 \rightarrow 52$$

2. Quel nombre doit-on entrer pour obtenir 46 en sortie ?

$$x \rightarrow x - 1 \rightarrow 4(x - 1) \rightarrow 4(x - 1) + x \rightarrow 4(x - 1) + x + 6$$

Lorsque l'on entre x , il ressort le nombre $4(x - 1) + x + 6 = 4x - 4 + x + 6 = 5x + 2$

$$x \rightarrow 5x + 2$$

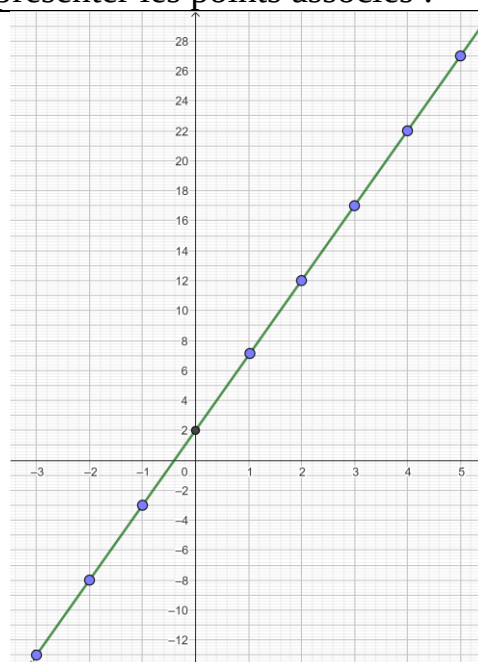
On cherche le nombre x que l'on doit rentrer pour obtenir en sortie 46.

Il faut donc résoudre l'équation $5x + 2 = 46$

$$\text{Soit } 5x = 44 \text{ et } x = \frac{44}{5} = 8,8$$

3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et représenter les points associés :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-13	-8	-3	2	7	12	17	22	27



Bilan : La machine numérique que l'on a créé porte le nom de **fonction**.

Cette **fonction** notée f associe à tout réel x un unique réel noté $f(x)$ « f de x »

Ce nombre est appelé **image de x par la fonction f** .

L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ avec $y = f(x)$ s'appelle la **courbe représentative** de la **fonction f** .

Notations équivalentes : $f: x \rightarrow 5x + 2$ $f(x) = 5x + 2$ $y = 5x + 2$

Exercice : soit le programme de calcul

-choisir un nombre

-élever ce nombre au carré

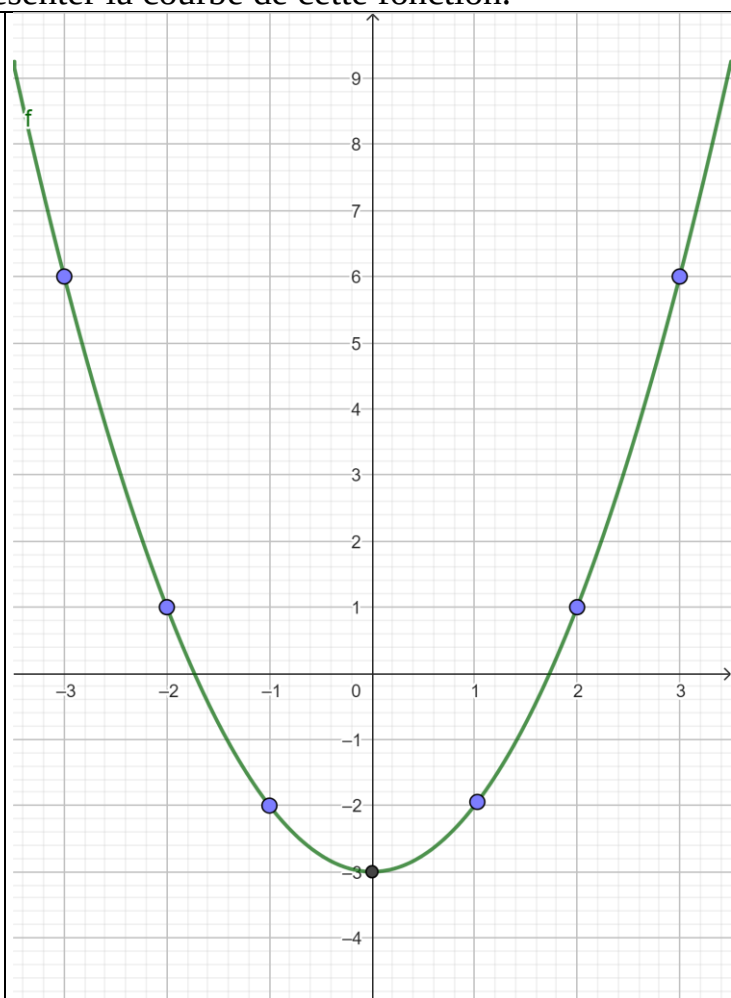
-enlever 3

1. Interpréter ce programme en terme de fonction.

$f: x \rightarrow x^2 - 3$ $f(x) = x^2 - 3$ $y = x^2 - 3$

2. Compléter le tableau de valeurs et représenter la courbe de cette fonction.

x	-3	-2	1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6



I- Notion de fonction et de courbe représentative – calculs d'images et d'antécédents

1. Notion de fonction et de courbe représentative :

Vidéos : mathssa.fr/fonction.html (jusqu'à 7mns40s)

mathssa.fr/fonction.html (15mns15s jusqu'à 21mns)

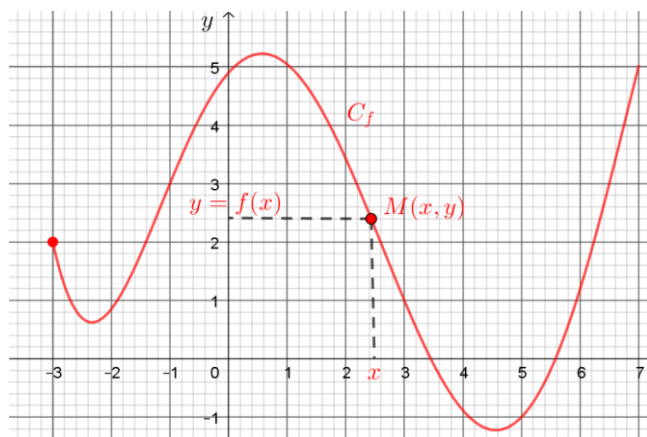
Définitions :

Soit D un **intervalle** de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

- Définir une **fonction** f sur D consiste à associer à chaque réel x de D , un unique réel appelé **image de x par la fonction f noté $f(x)$ qui se lit « f de x »**
 D est appelé **domaine de définition** de la fonction f .

- La **courbe représentative** C_f de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ où $y = f(x)$ lorsque x parcourt D .

Notation : on dit que cette courbe C_f a pour équation $y = f(x)$ dans un repère du plan.



Notation 1 :

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \dots$$

Notation 2 :

f est la fonction définie sur D par $f(x) = \dots$

Notation 3 :

La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$ avec x décrit D

Exemples :

- soit f le procédé mathématique qui, à tout réel x de $[-5; +\infty[$, associe le réel $\sqrt{x}$.

Peut-on ainsi construire une fonction ? Si non, construire une fonction en précisant sur quel intervalle vous vous placez.

Non ce n'est pas une fonction car les réels strictement négatifs n'ont pas d'image.

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- soit f le procédé mathématique qui, à tout réel x , associe le réel $\frac{1}{x}$.

Peut-on ainsi construire une fonction ? Si non, construire une fonction en précisant sur quel intervalle vous vous placez.

Non ce n'est pas une fonction car 0 n'a pas d'image.

f est la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$

Remarque : on peut facilement créer une fonction f sur Python.

Exemple :

```
1 def f(x):
2     return x**2-3*x+1
```

Console Python

```
*** Python 3.4.5 [Continuum Analytics, Inc.] (default:
32 bit (Intel)) on win32. ***
*** Remote le moteur Python est actif ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> f(4)
5
...

```

L'argument correspond à variable x . f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$
 L'image de 4 est 5.

2. Image – antécédents :

Vidéo : mathssa.fr/fonction.html (7mns40s jusqu'à 15mns15s)

Définition :

On appelle **antécédent** d'un réel b tout réel a dont l'**image par f** est b .

Concrètement : si $f : a \rightarrow b$ alors :

b est l'image de a par f

a est un antécédent de b par f

Exemple : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Calculer l'image de -2, de 2 et 3 par f .

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 \quad -2 \rightarrow 4$$

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad 2 \rightarrow 4$$

$$f(3) = 3^2 = 9 \quad 3 \rightarrow 9$$

9 est l'image de 3 par la fonction f .

-2 est un antécédent de 4 par la fonction f .

Remarque : un nombre peut admettre plusieurs antécédents.

Par contre l'image d'un nombre est unique.

Point méthode :

Soit f une fonction définie sur D .

- Pour trouver l'image d'un réel, on remplace x par ce nombre dans l'expression de $f(x)$.
- Pour trouver les antécédents de b , on résout l'équation d'inconnue x , $f(x) = b$

Exercice :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 2$.

1. Déterminer les images de -2 et de 4.
2. Donner un antécédent de 12.
3. Déterminer le ou les antécédents de -5.

$$1. f(-2) = -5 \times (-2) + 2 = 12$$

$$-2 \rightarrow 12$$

$$f(4) = -5 \times 4 + 2 = -18$$

$$4 \rightarrow -18$$

2. Un antécédent de 12 est -2.

3. $x \rightarrow -5$ On résout l'équation $f(x) = -5$

$$-5x + 2 = -5$$

$$\text{équivalent à } -5x = -5 - 2$$

$$\text{équivalent à } -5x = -7$$

$$\text{équivalent à } x = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad -5 \text{ a un seul antécédent : } \frac{7}{5}$$

3.Point sur une courbe

Vidéo : mathssa.fr/pointcourbe.html (jusqu'à 10mns42s)

Propriété :

Un point **appartient** à la courbe représentative C_f d'une fonction f lorsque ses **coordonnées** vérifient l'**équation** de la courbe : $y = f(x)$.

Autrement dit :

$A(a;b) \in C_f$ équivaut à $f(a) = b$

Exercice :

soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ dont la courbe a pour équation $y = 3x^2 - 3$.

Le point $A(-2;9)$ appartient-il à la courbe de f ? Qu'en est-il de $B(0;2)$? Qu'en est-il de $C(3;24)$? Justifier.

$$3(-2)^2 - 3 = 3 \times (-2) \times (-2) - 3 = 3 \times 4 - 3 = 12 - 3 = 9$$

Par conséquent, $A(-2;9)$ appartient à la courbe de f .

$$3 \times 0^2 - 3 = 3 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3 \neq 2$$

Par conséquent, $B(0;2)$ n'appartient pas à la courbe de f .

$$3 \times 3^2 - 3 = 3 \times 9 - 3 = 24$$

Par conséquent, $C(3;24)$ appartient à la courbe de f .

Bilan : vidéo : mathssa.fr/notationsfcts.html

II- De l'expression d'une fonction à la courbe représentative

Un **tableau de valeurs** est un tableau comportant 2 lignes (ou 2 colonnes). Une première ligne correspondant à différentes valeurs de la variable x Une deuxième ligne correspondant aux images associées à ces valeurs.

En règle générale, les valeurs de x sont « espacées » de façon régulière (« de 1 en 1 », « de 0,1 en 0,1 » etc ...)

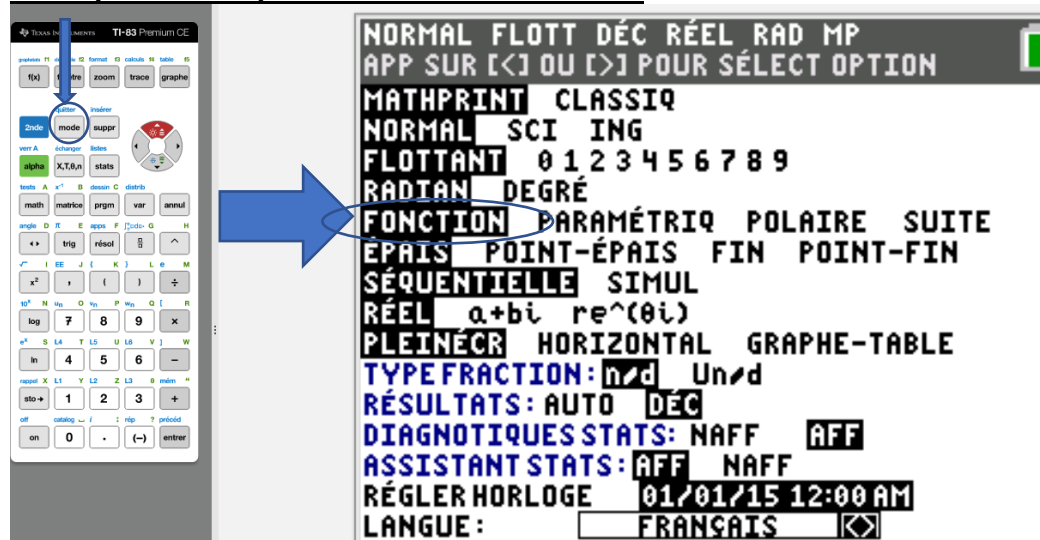
Il peut être parfois utile d'utiliser la calculatrice ou l'ordinateur afin de remplir un tableau de valeurs.

vidéo : mathssa.fr/tableauvalti.html (4mns 10s) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 10x - 7$.

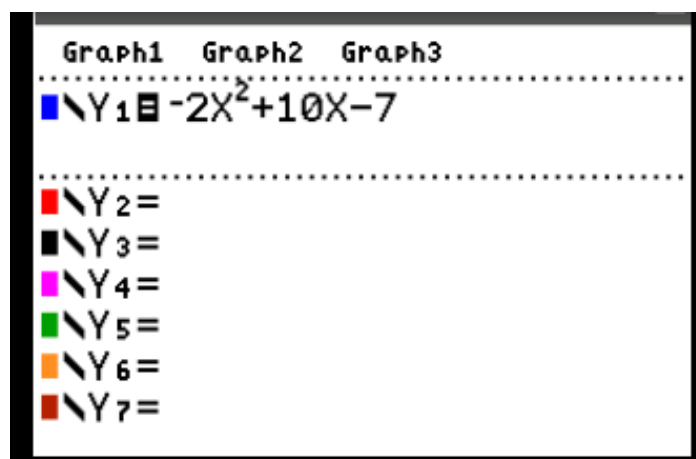
On voudrait remplir le tableau de valeurs ci-dessous puis tracer la courbe à l'aide de la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

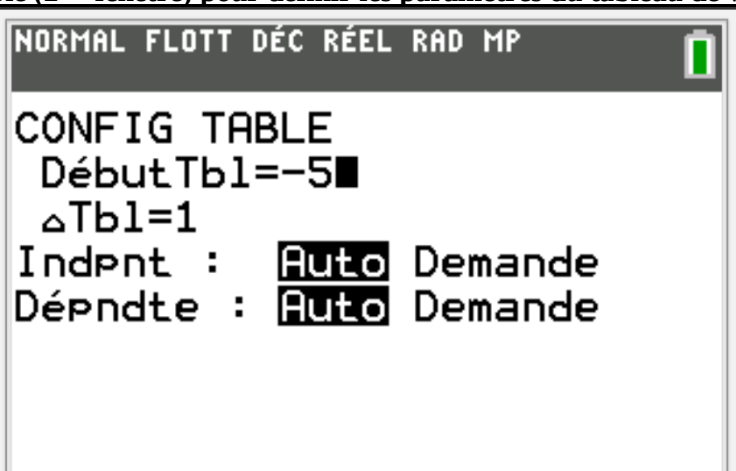
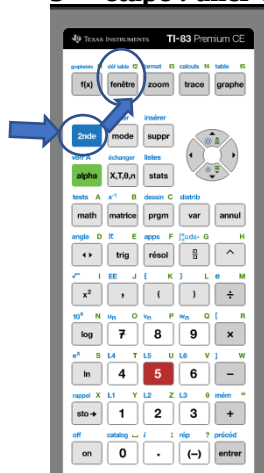
1ère étape : vérifier que le mode fonction est activé



2^{ème} étape : rentrer l'expression de $f(x)$ (attention ne pas confondre le « petit moins » du signe avec le « grand moins » de la soustraction)



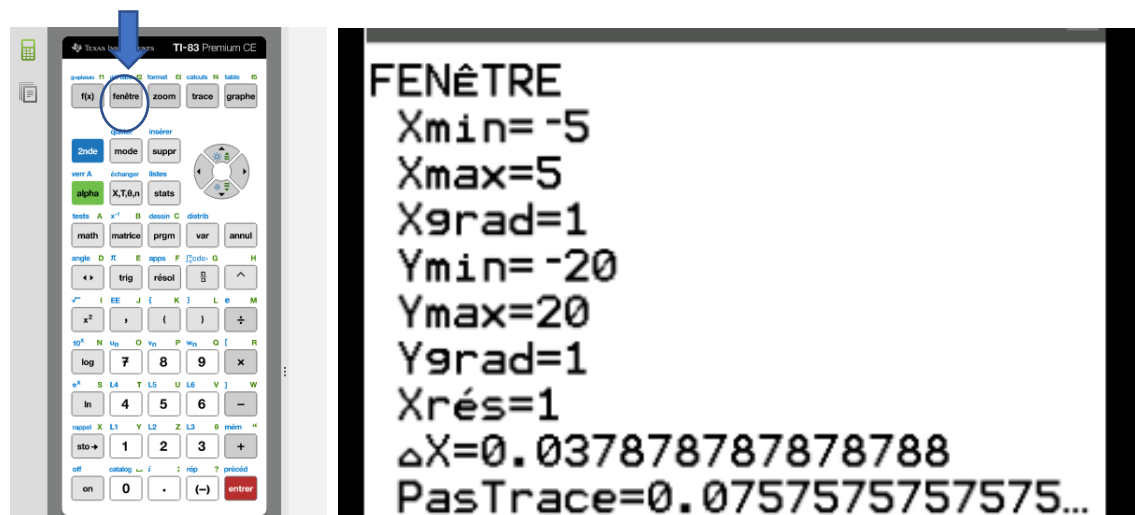
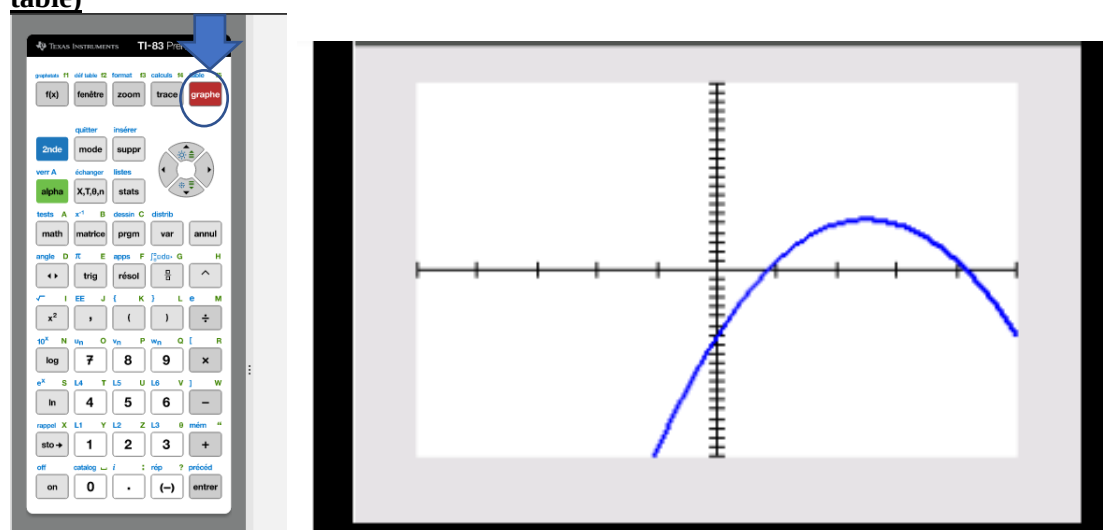
3^{ème} étape : aller dans déf table (2^{nde} fenêtre) pour définir les paramètres du tableau de valeurs



4^{ème} étape : aller dans table (2^{nde} graphe) pour obtenir le tableau de valeurs



X	Y1
-5	-107
-4	-79
-3	-55
-2	-35
-1	-19
0	-7
1	1
2	5
3	5
4	1
5	-7

5^{ème} étape : aller dans fenêtre pour définir les paramètres de la fenêtre graphique**6^{ème} étape : aller dans graphe pour obtenir la courbe ou la courbe avec le tableau de valeurs (mode graphe table)****III- Lecture graphique : images , antécédents , résolutions d'équations et d'inéquations**

On se donne un repère orthogonal du plan.

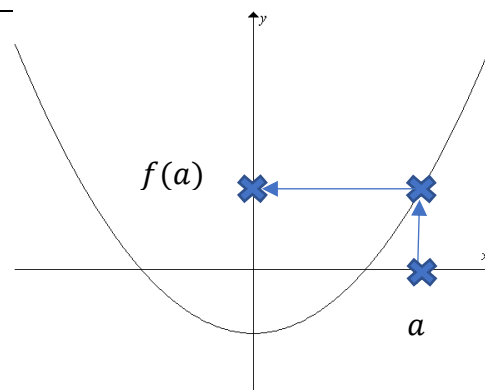
1.Lecture graphique d'images et d'antécédents :

Vidéos : mathssa.fr/fonction.html (à partir de la 21^{ème} minute) et mathssa.fr/imagant.html (4mns)
mathssa.fr/resolequation.html (3mns)

Point méthode :

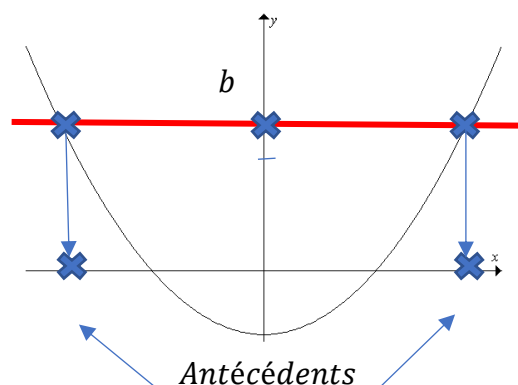
Pour trouver l'**image** d'un réel a :

- on place a sur l'axe des abscisses
- on représente le point de la courbe d'abscisse a
- l'ordonnée du point correspondant est $f(a)$



Pour trouver les **antécédents** d'un réel b :

- on place b sur l'axe des ordonnées
- on trace la droite horizontale d'équation $y = b$
- on repère les points d'intersection de la droite et de la courbe de f
- les abscisses des points correspondants sont les **antécédents** de b .



Convention : Une lecture graphique ne donne que des valeurs approchées sauf quand le codage indique la valeur exacte des coordonnées (point apparent sur la courbe).

Remarque importante : résoudre l'équation $f(x) = b$ revient à chercher les antécédents du nombre b .

PROCEDE MEMOTECHNIQUE

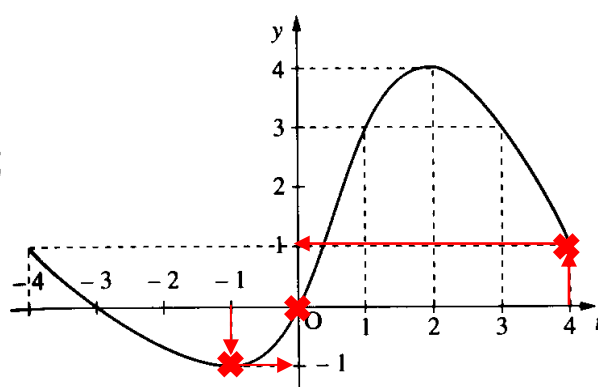
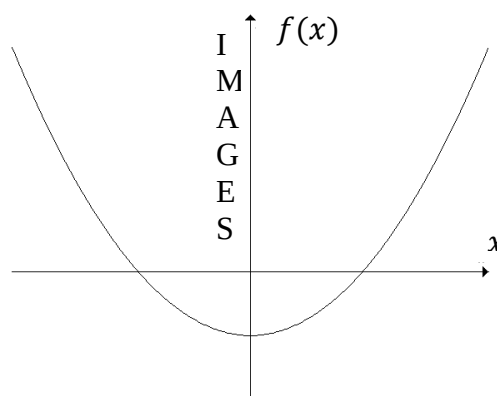
Il suffit de savoir sur quel axe se lisent les images et les antécédents.

Pour cela, penser à notre reflet dans le miroir. Celui-ci s'apprécie verticalement...

Les images se liront donc sur l'axe vertical, les antécédents sur l'autre axe...



Exemple:

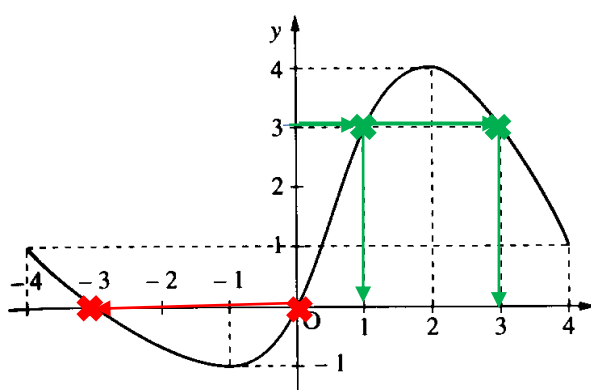


a) Donner les images de -1 ; 0 et 4 .

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(4) = 1$$



b) Résoudre les équations d'inconnue x : $f(x) = 0$ (antécédents de 0)

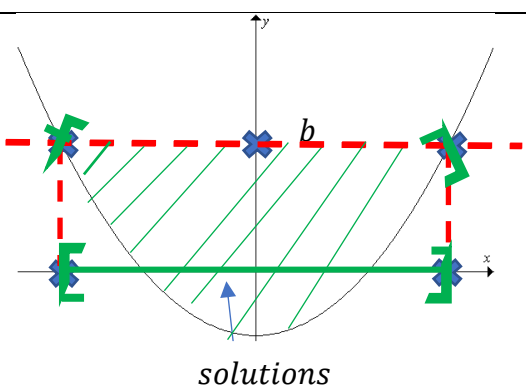
L'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-3; 0\}$

c) Trouver les antécédents de 3.

3 a deux antécédents : 1 et 3

2. Résolution graphique d'inéquations :Vidéo : mathssa.fr/resolinequa.html (6mns)**Point méthode :**Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq b$

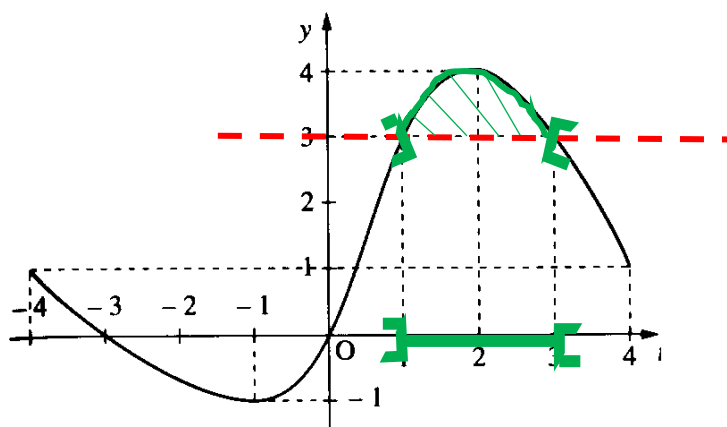
- on trace la droite horizontale d'équation $y = b$
- on représente le domaine délimité par la courbe et la droite et situé **au-dessous** de la droite.
- les **abscisses** des points correspondants sont les solutions de l'inéquation.



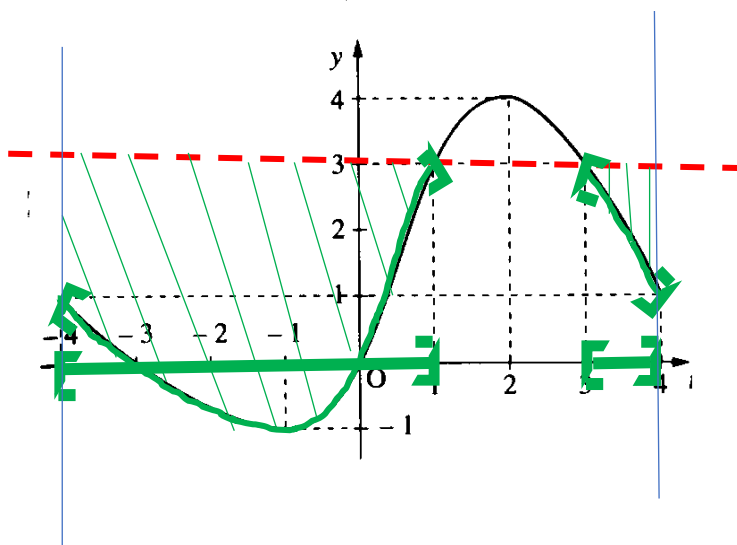
Remarque : lorsque l'inégalité est stricte, on exclut les points d'intersection. Pour une inéquation du type $f(x) \geq b$, remplacer au-dessous par au-dessus

Exercice :1. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 3$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S =]1 ; 3[$

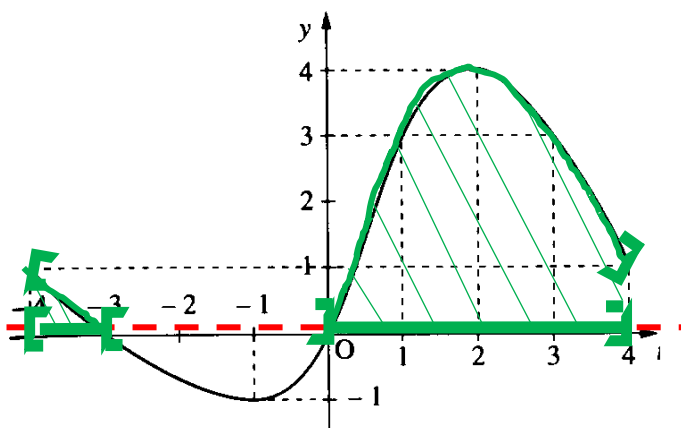
2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 3$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S = [-4 ; 1] \cup [3 ; 4]$



3. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est
 $S = [-4; -3[\cup]0; 4]$



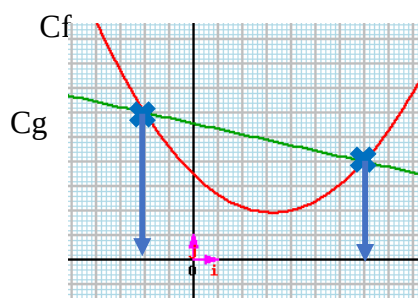
3. Résolution graphique d'équations ou d'inéquations impliquant 2 fonctions:

Vidéo : mathssa.fr/resolgraph.html (10mns46s)

Point méthode :

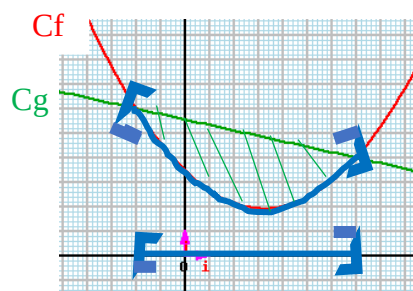
Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

- on trace les courbes de f et de g
- on représente le ou les points d'intersection
- on lit les abscisses correspondantes



Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

- on trace les courbes de f et de g
- on représente le domaine délimité par les 2 courbes situé au-dessous de la courbe de g .
- on lit les abscisses correspondantes



Remarque : lorsque l'inégalité est stricte, on exclut les points d'intersection. Pour une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$, remplacer au-dessous par au-dessus.

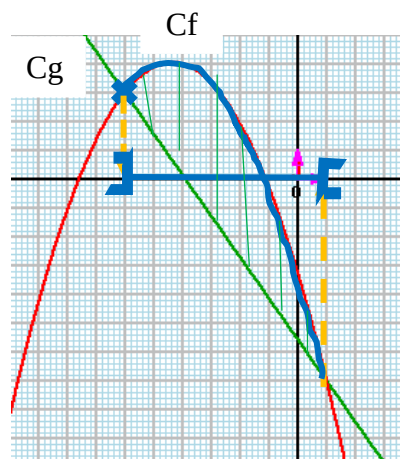
Application :

a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

L'ensemble des solutions est $S = \{-6; 1\}$

b) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

L'ensemble des solutions est
 $S =]-6; 1[$



Exercices d'entraînement : mathssa.fr/wimsequainequa