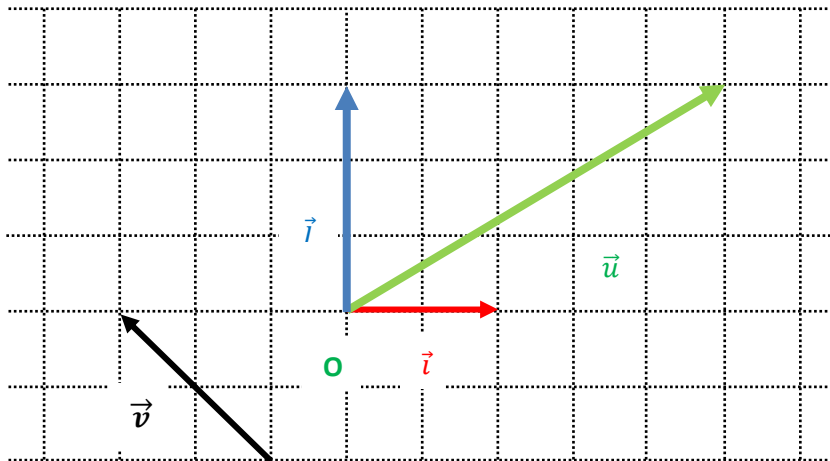


CHAPITRE 8 – Les vecteurs 2^{ème} partie

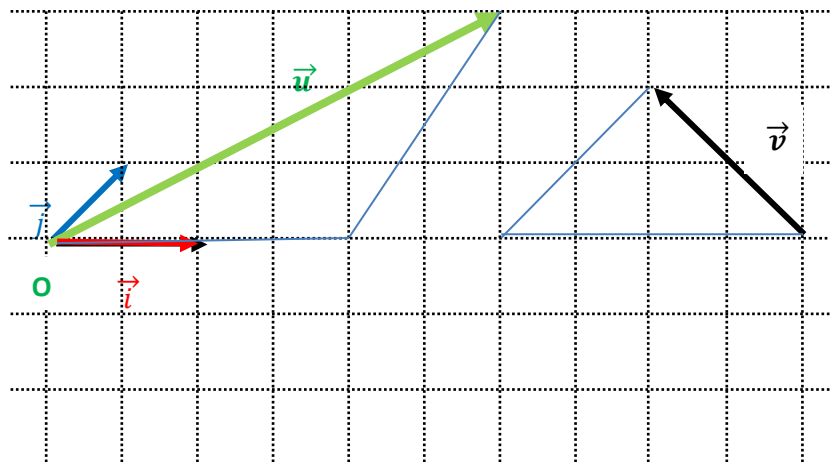
Exercice d'introduction :

Exprimer , si possible, pour chaque situation $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

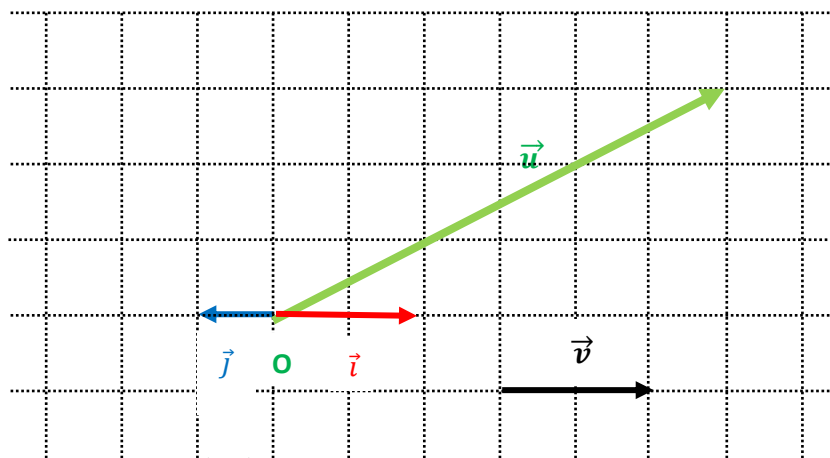
1. $\vec{u} = 2,5 \vec{i} + 1 \vec{j}$ $\vec{v} = -1 \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j}$



2. $\vec{u} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j}$ $\vec{v} = -2 \vec{i} + 2 \vec{j}$



3. $\vec{u} = \text{impossible}$ $\vec{v} = 1 \vec{i} = 2 \vec{j}$



Que peut on dire des vecteurs que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{v}$? ils ont la même direction.

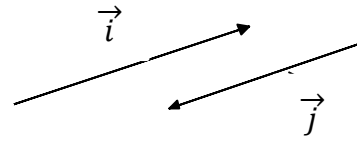
Si 2 vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ n'ont pas la même direction, on pourra exprimer tout vecteur du plan en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$. Les nombres qui sortent sont les coordonnées...

I – Repère du plan - coordonnées de vecteurs et opérations

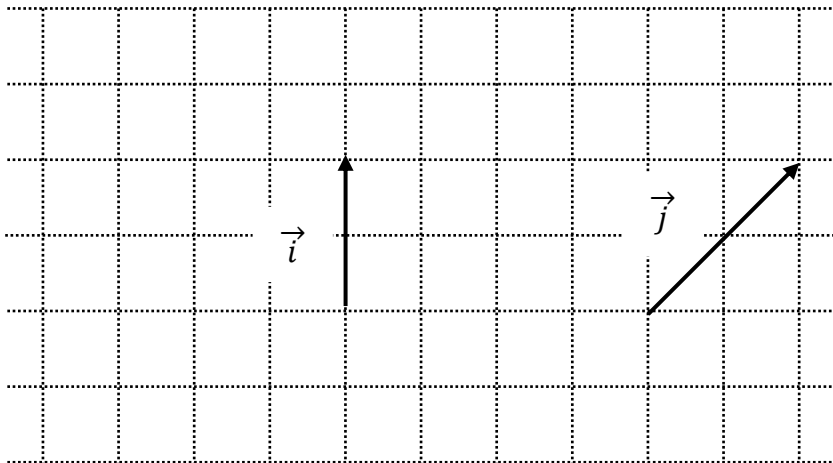
1. Vecteurs colinéaires

Définition :

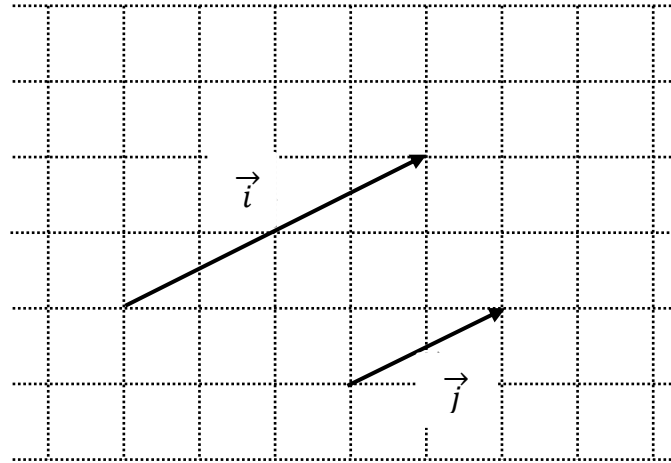
Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction



Exemple : dire si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires

2. Repère dans un plan

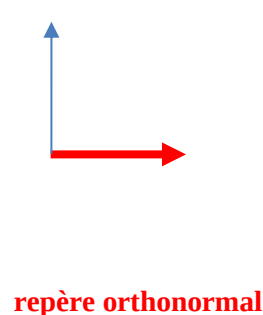
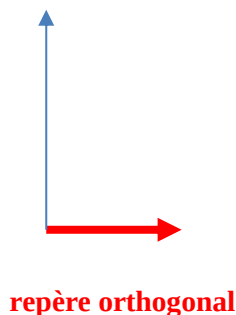
Définition - vocabulaire:

Soit O un point du plan et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non nuls** et non **colinéaires** du plan

Le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère du plan**.

Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ forme alors une **base du plan**.

Un repère du plan dont les vecteurs ont des directions **perpendiculaires** est dit **orthogonal** et si en plus les vecteurs ont la **même norme**, le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

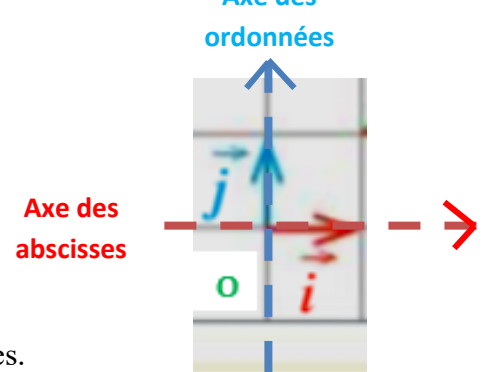


Convention :

- On utilisera dorénavant un repère orthogonal ou orthonormé

Le vecteur $\vec{i}$ sera dorénavant « horizontal » orienté de la gauche vers la droite et le vecteur $\vec{j}$ « vertical » orienté de bas en haut.

- La droite passant par O et dirigé par $\vec{i}$ s'appelle l'axe des abscisses.
- La droite passant par O et dirigé par $\vec{j}$ s'appelle l'axe des ordonnées.
(ORDONNEES → « O » → « HAUT »)



3.Coordonnées d'un vecteur dans un repère du plan

Propriété - définition :

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'exprime de manière **unique** sous la forme $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$ où x et y sont des nombres.

On dira que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $(x; y)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

x est appelé **abscisse** du vecteur $\vec{u}$, y est appelé **ordonnée** du vecteur $\vec{u}$

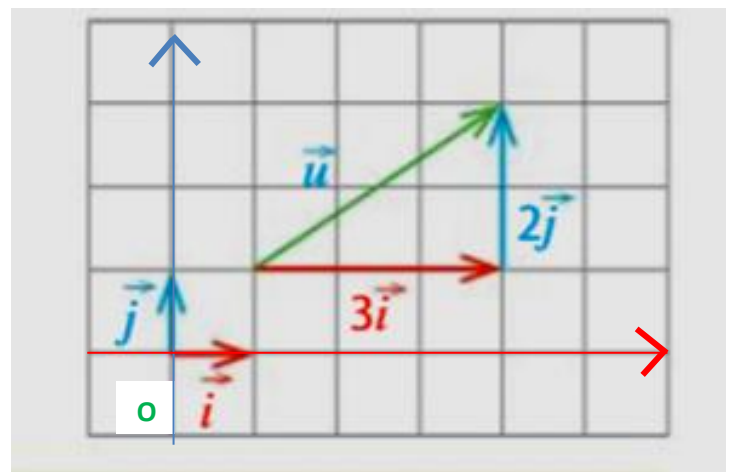
Remarques : deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non nuls** et non **colinéaires** du plan nous permettent de construire tous les vecteurs du plan (cf activité). Voilà pourquoi $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un appelé **repère** du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé **base** du plan.

Vidéo : mathssa.fr/vecteurs9.html (4minutes 30s)

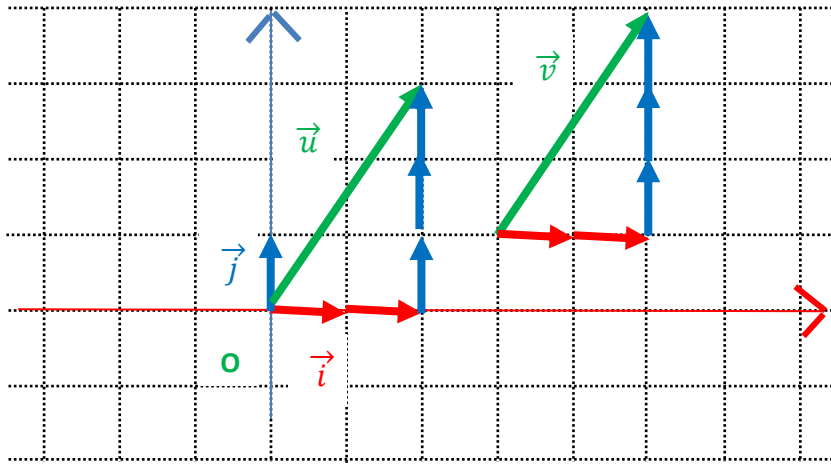
Application :

Dans la figure ci-contre :

$\vec{u} = 3 \vec{i} + 2 \vec{j}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3; 2)$ ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

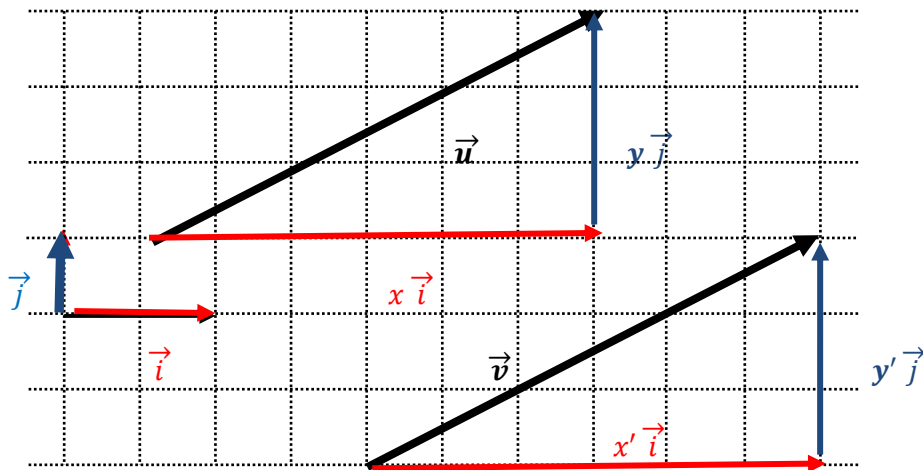


Exercice : dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, représenter, à partir du point O, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u} (2; 3)$. Représenter un vecteur $\vec{v}$ égal au vecteur $\vec{u}$. Lire les coordonnées de $\vec{v}$.



Il est clair que $\vec{v} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j}$. On en déduit que les coordonnées de $\vec{v}$ sont $\vec{v} (2; 3)$

4. Vecteurs égaux et coordonnées



Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\vec{u} (x; y)$ et $\vec{v} (x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
(deux vecteurs égaux ont les **mêmes coordonnées**)

5. Opérations sur les coordonnées de vecteurs

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\vec{u} (x; y)$ et $\vec{v} (x'; y')$ et soit k un réel.

- le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v} (x + x'; y + y')$
(l'abscisse d'une somme de vecteurs est la somme des abscisses
et l'ordonnée d'une somme de vecteurs est la somme des ordonnées)
- le vecteur $k \vec{u}$ a pour coordonnées $k \vec{u} (kx; ky)$

Preuve : admis

Remarque 1: Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x; -y)$.

Remarque 2: les formules sur les coordonnées permettent d'éviter des constructions géométriques qui peuvent être hasardeuses et évitent de surcharger une figure (cf exercice 5 de l'activité)

Exemple : [vidéo : mathssa.fr/vecteurs13.html](http://mathssa.fr/vecteurs13.html) (4 minutes)

soit $\vec{u} (3; 1)$ et $\vec{v} (1; 4)$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $-2\vec{u}$ et $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v} (3 + 1; 1 + 4)$ soit $(\vec{u} + \vec{v})(4; 5)$

$-2\vec{u} (-2 \times 3; -2 \times 1)$ soit $-2\vec{u} (-6; -2)$

$3\vec{u} (3 \times 3; 3 \times 1)$ soit $3\vec{u} (9; 3)$

$-4\vec{v} (-4 \times 1; -4 \times 4)$ soit $-4\vec{v} (-4; -16)$

$$\begin{array}{r} 3\vec{u} (9; 3) \\ -4\vec{v} (-4; -16) \\ \hline (3\vec{u} - 4\vec{v})(9 + (-4); 3 + (-16)) \end{array}$$

soit $(3\vec{u} - 4\vec{v})(5; -13)$

II – Coordonnées d'un vecteur défini à l'aide de deux points-applications

1. Coordonnées d'un vecteur d'origine O

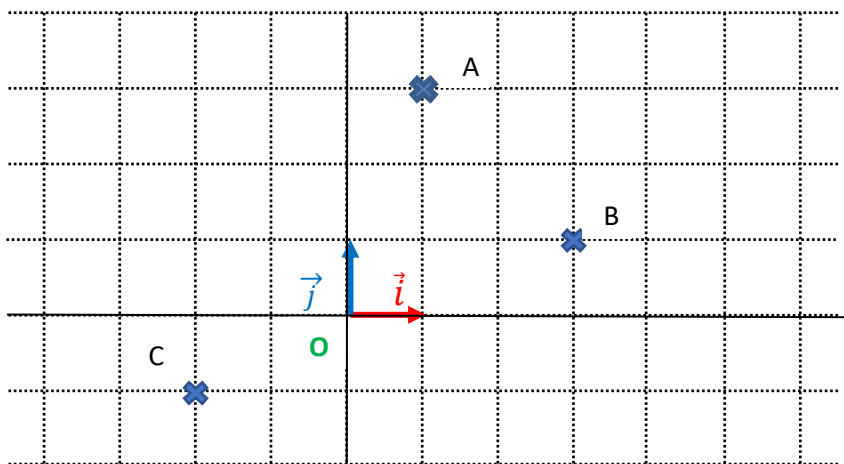
A partir d'un exemple : Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Lire les coordonnées des points A, B et C ainsi que des vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$

A(1; 3) $\vec{OA}(1; 3)$

B(3; 1) $\vec{OB}(3; 1)$ Que remarque t'on ? le point A et le vecteur $\vec{OA}$ ont les mêmes

Coordonnées idem pour B et $\vec{OB}$ ainsi que C et $\vec{OC}$

C(-2; 1) $\vec{OC}(-2; 1)$



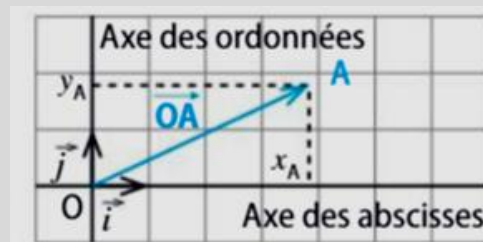
Définition:

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et un point A de coordonnées $(x_A; y_A)$.

x_A est l'abscisse du point A et y_A est l'ordonnée du point A

Le vecteur $\vec{OA}$ a pour coordonnées $\vec{OA}(x_A; y_A)$.

Autrement dit : le point A et le vecteur $\vec{OA}$ ont les mêmes coordonnées



[vidéo : mathssa.fr/vecteurs10.html](http://mathssa.fr/vecteurs10.html) (3mn50s)

2. Coordonnées d'un vecteur défini à l'aide de deux points et du milieu d'un segment

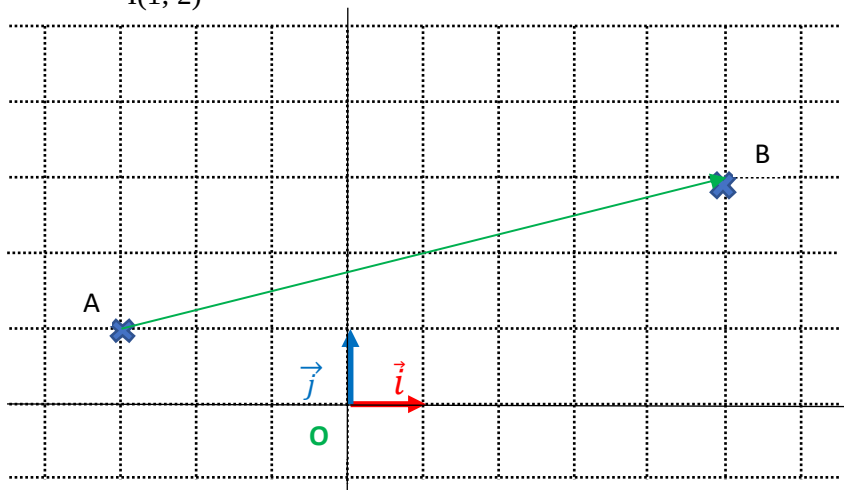
A partir d'un exemple : Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Lire les coordonnées des points A et B ainsi que des vecteurs $\vec{AB}$. Représenter le point I milieu du segment [AB]. Trouver les coordonnées du point I.

A(-3 ; 1)

B(5 ; 3)

$\vec{AB}(8 ; 2)$

I(1 ; 2)



Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- le point I milieu du segment [AB] a pour coordonnées $I(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$

(l'abscisse du milieu est la **moyenne des abscisses** des points A et B, l'ordonnée du milieu est la **moyenne des ordonnées** des points A et B)

Démonstration : Soit A et B deux points du plan de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et le point I milieu du segment [AB].

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$= -\vec{OA} + \vec{OB}$$

$$= \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\frac{\vec{OB}(x_B; y_B) - \vec{OA}(-x_A; -y_A)}{\vec{OB} - \vec{OA}(x_B - x_A; y_B - y_A)}$$

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

A partir des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$, on peut construire le parallélogramme OADC.

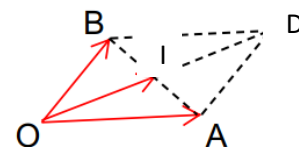
Le point I milieu du segment [AB] est ainsi le milieu du segment [OD].

On en déduit que $\vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{OD}$ or $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$

Ainsi, $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

$\vec{OI}$ (ou I) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ soit :

$$I(\frac{1}{2}(x_A + x_B); \frac{1}{2}(y_A + y_B)) \text{ ou encore } I(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$$



Moyen mnémotechnique pour calculer les coordonnées d'un vecteur:

faire « EXtrémité » - « Origine » soit « EXO »

Application 1: vidéo : mathssa.fr/vecteurs11.html (2 minutes 35s)

Soit A et B deux points de coordonnées $(1; -2)$ et $(-2; 3)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On pense à « EXO » soit « B-A »

$$(-2; 3)$$

$$-(1; -2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2 - 1; 3 - (-2))$ soit $\overrightarrow{AB}(-3; 5)$

Application 2: Vidéo : mathssa.fr/vecteurs15.html (1mn 46s)

soit $A(5; -3)$, $B(-1; 2)$. Déterminer les coordonnées du point I milieu de [AB].

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) \text{ soit } I\left(\frac{5+(-1)}{2}; \frac{(-3)+2}{2}\right) \text{ soit } I(2; -0,5)$$

Exercice corrigé 1: démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Soit les points $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $E(1; -4)$ et $F(4; -2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$.

2. Démontrer que le quadrilatère ABFE est un parallélogramme

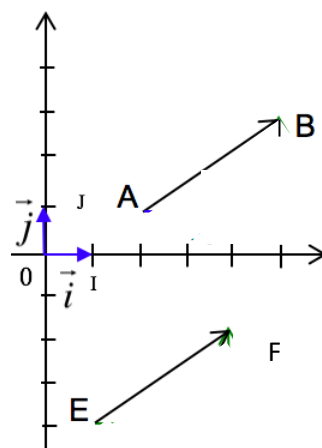
1. $\overrightarrow{AB} = (5 - 2; 3 - 1) = (3; 2),$

$$\overrightarrow{EF} = (4 - 1; -2 - (-4)) = (3; 2).$$

2. $\overrightarrow{AB}(3; 2)$ et $\overrightarrow{EF}(3; 2)$ ont les mêmes coordonnées.

On en déduit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Par conséquent, le quadrilatère ABFE est un parallélogramme.



Exercice corrigé 2: coordonnées d'un milieu et parallélogramme

Vidéo : mathssa.fr/vecteurs16.html

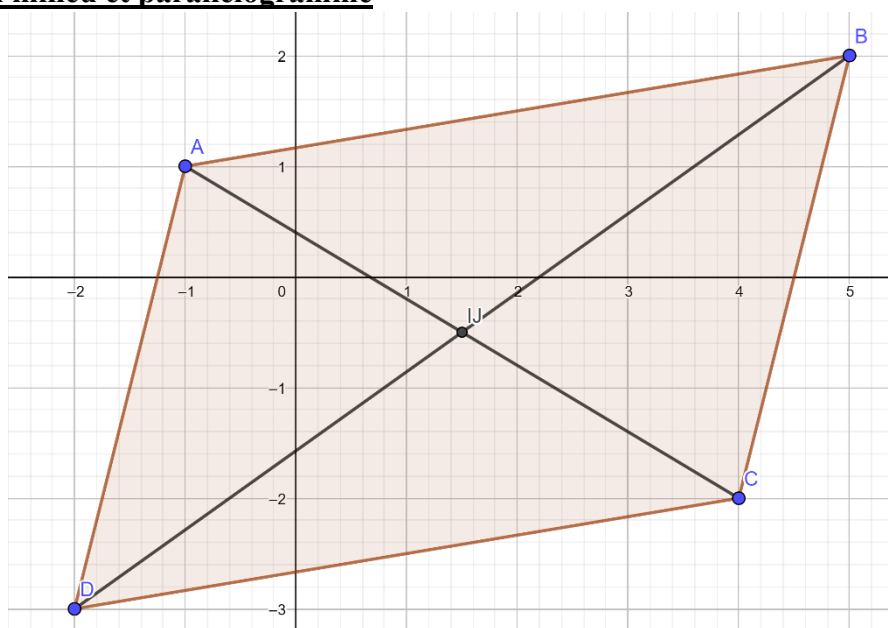
(3mn 12s)

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit quatre points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(-1; 1)$, $B(5; 2)$, $C(4; -2)$ et $D(-2; -3)$.

1. Calculer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.



1. $I\left(\frac{x_A+x_C}{2}; \frac{y_A+y_C}{2}\right) \text{ soit } I\left(\frac{(-1)+4}{2}; \frac{1+(-2)}{2}\right) \text{ soit } I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$J\left(\frac{x_B+x_D}{2}; \frac{y_B+y_D}{2}\right) \text{ soit } J\left(\frac{5+(-2)}{2}; \frac{2+(-3)}{2}\right) \text{ soit } J\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

2. On en déduit que I et J sont confondus. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent donc en leur milieu. Ainsi le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

4.Coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle

Vidéo : mathssa.fr/vecteurs12.html (3mns 52s)

Exercice : Dans un repère, soit les points A(1; 2), B(-4; 3), C(1; -2). Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

On pose D de coordonnées $D(x; y)$

On a : $\overrightarrow{BA}(1 - (-4); 2 - 3)$ soit $\overrightarrow{BA}(5; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(x - 1; y - (-2))$ soit $\overrightarrow{CD}(x - 1; y + 2)$

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Donc $x - 1 = 5$ et $y + 2 = -1$.

Soit $x = 5 + 1 = 6$ et $y = -1 - 2 = -3$ $D(6; -3)$

