

Exercices sur le chapitre 11

Exercice 1 : démontrer l'égalité de deux expressions

Les questions sont indépendantes

1. Démontrer que ,pour tout réel x , $x^2 + 13x - 7 = (2x - 1)(x + 7) - x^2$.
2. Démontrer que ,pour tout réel x , $(3x - 1)(1 - x) = (2x + 4)x - 5x^2 - 1$
3. Démontrer que $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3}$

Exercice 2 : réduire des fractions

Ecrire chaque expression sous la forme d'une unique écriture fractionnaire :

$$A = \frac{2x-3}{4} - 1 \quad B = 2 - \frac{3x+2}{3} \quad C = \frac{x}{6} - \frac{5x-4}{4}$$

Exercice 3 : réduire des fractions

Ecrire chaque expression sous la forme d'une unique écriture fractionnaire :

$$A = \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3} \quad B = \frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x} \quad C = \frac{x}{x-1} - x$$

Exercice 4 : réduire des fractions-égalité de deux expressions

1. Démontrer que pour tout $x \neq -2$, $\frac{5x+7}{x+2} = 5 - \frac{3}{x+2}$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 2$, $2 + \frac{5}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2}$

Exercice 5 : développements

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

$$A = (x+2)^2 + (2x-1)(2x+1) \text{ et } B = (x-4)(x+4) - (2x-1)^2$$

Exercice 6 : développements

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

$$A = (2x+3)^2 - (x-4)(3x+1) \text{ et } B = (4x-2)(4x+2) - 2(x-1)^2$$

Exercice 7 : factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 9x, B = (2x+1)(3x-4) - 4(2x+1)(1+x) \\ C = x^2 - 4x + 4, D = x^2 - 9, E = 9x^2 + 6x + 1, \\ F = (x+1)^2 - 9 \text{ et } G = 2(x-3)(x+4) - (x^2 - 9)$$

Exercice 8 : factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = -4x^2 + 3x, B = (1-x)^2 + 3(1-x)(x+2) \\ C = 4x^2 - 25, D = 100x^2 + 20x + 1, \\ E = (3x+1)^2 - (4x-5)^2 \text{ et } F = 3(49x^2 - 16) - (7x+4)(x+1)$$

Exercice 9 :factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = x(3x - 1) + 5x \quad , \quad B = (x - 2)^2 - 36$$

$$C = x^2 + 2x + 1 - (x + 1)(2x - 5) \quad , \quad D = (7x - 3)^2 - x(7x - 3)$$

$$E = (2 - x) - (2 - x)^2 \quad , \quad F = 4ab - 3cb$$

Exercice 10 :factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (x + 5)^2 - (2x - 4)^2 \quad ; \quad B = x^2 + 6x + 9 \quad C = 9x^2 - 12x + 4.$$

$$D = (2x - 1)(3x + 5) - (4x^2 - 1) \quad \text{et} \quad E = x^2 - 2x + 1 - (x - 1)(x + 7)$$

Exercice 11 :factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 1 - 49x^2 \quad ; \quad B = (3x - 7)^2 - 25$$

$$C = (2x - 4)^2 - (4x - 1)^2 \quad ; \quad D = x^2 + 10x + 25$$

$$E = (x - 7)(-x + 2) - 3(x^2 - 49) \quad \text{et} \quad F = 2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 4)$$

Exercice 12 :applications de la factorisation

1. Calculer mentalement à l'aide d'une factorisation,

$$A = 27^2 - 25^2$$

$$B = 154^2 - 146^2$$

$$C = 200\,006^2 - 200\,004^2$$

2. Comparer en justifiant $A = 0,8^{n+1}$ et $B = 0,8^n$. (n est un entier naturel) (on fera la différence entre A et B et on remarquera que $0,8^{n+1} = 0,8^n \times 0,8^1 = 0,8^n \times 0,8$)

Exercice 13 :des factorisations plus complexes (spé maths)

1. Factoriser :

$$A = (2x - 1)^2 - 9(2 - x)^2 \quad ; \quad B = 4(x - 1)^2 - 9$$

$$C = (x^2 - 9)(2x - 1) - (x - 3)^2 \quad ; \quad D = -6x + 10x^2 + (3 - 5x)^2 \quad ;$$

$$E = 7x(5 - x) + (x + 1)(x - 5)$$

2. Factoriser : $A = x^3 - 9x$ (mettre $f(x)$ sous la forme d'un produit de 3 facteurs)

$$B = 4x^2 - 5$$

$$C = x^4 - 1 \quad (\text{mettre } f(x) \text{ sous la forme d'un produit de 3 facteurs})$$

3. Factoriser :

$$A = (x + 2)^2 - (2x - 1)^2 \quad , \quad B = x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$C = 2(x + 1)(x - 3) - 5(x - 3)(3x + 1) \quad , \quad D = -3(4x^2 - 9) + (2x - 3)(-x + 5)$$

$$E = (x^2 - 16)(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 8x + 16)$$

Exercice 14 : équations produit nul

1. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $(3x + 9)(4x - 2) = 0$

2. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $(5x + 1)(3 - 2x) = 0$

3. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $x(x - 1)(-2x + 7) = 0$

Exercice 15 : équations produit nul

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ci-dessous :

a) $(5x - 3)(2 - 3x) = 0$ b) $3x(2x - 7) = 0$
c) $-3x^2(2x - 7) = 0$ d) $(-3x + 1)^2 = 0$
e) $x^2(x - 1)(-3 - 2x) = 0$ f) $(x - 1)(2x + 3)(x - 4) = 0$

Exercice 16 : équations quotient nul

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ci-dessous :

i) $\frac{2x-6}{x-9} = 0$
ii) $\frac{-4x+1}{2x-3} = 0$

Exercice 17 : résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations :

i) $x^2 - 5x = 0$, ii) $-3x^2 + x = 0$ iii) $4x^2 = 28x$

Exercice 18 : résolution d'un problème (https://youtu.be/fIObKE_CyHw)

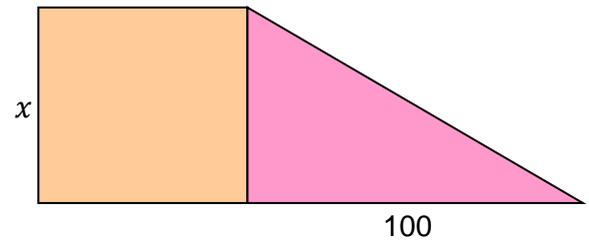
Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue.

L'un est de forme carrée, l'autre à la forme d'un triangle rectangle de base 100m.

On désigne par x la longueur du côté commun.

Les données sont représentées sur la figure ci-contre :

Sachant que les deux champs sont de surface égale, calculer leurs dimensions.



Exercice 19 : résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations :

i) $(x - 1)(x + 3) = 2(x - 1)(2x - 1)$
ii) $5x(3x + 2) = (3x + 2)^2$

Exercice 20 : résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations :

i) $x(1 - 5x) = 1 - 5x$
ii) $(8x - 3)^2 = 49$
iii) $(4x + 1)^2 = x^2$

Exercice 21 : résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations :

i) $x^2 - 9 = 2(x + 3)$
ii) $(2x + 3)^2 = (x - 1)^2$
iii) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x + 1)$

Exercice 22 : résolution algébrique d'équations du type $x^2=a$

1. Résoudre algébriquement les équations :

i) $x^2 = 2$ ii) $x^2 = 5$ iii) $x^2 = -1$

2. Résoudre en utilisant vos connaissances dans \mathbb{R} , l'équation : $(5x + 3)^2 = 16$

Exercice 23 : résolution d'équations se ramenant à une équation quotient nul

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations :

i) $\frac{x^2-1}{x+3} = 0$ ii) $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$ iii) $\frac{3x-2}{x} = \frac{3x+6}{x+1}$ (spé maths)

iv) $\frac{x^2-6x+9}{(x+1)(x-3)} = 0$ v) $\frac{x-4}{2x+3} = \frac{2x+3}{x-4}$

vi) $\frac{x^2-8}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ vii) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{36}{x^2-9}$

Exercice 24 :

1. Résoudre graphiquement à l'aide de la calculatrice l'équation $x + 2 = \frac{-1}{x}$.
2. Résoudre algébriquement cette équation. (penser à factoriser le numérateur)

Exercice 25 : expression la plus adaptée

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2(x-1)^2 + 3(x-1)(x-3)$ (*expression 1*)

1. Développer $f(x)$. (*expression 2*)
2. Factoriser $f(x)$ (à partir de la forme initiale). (*expression 3*)
3. Montrer que $f(x) = (x-4)^2 - 9$. (*expression 4*)
4. En utilisant l'expression la plus adaptée, calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$, $f(\sqrt{2})$
5. En utilisant l'expression la plus adaptée, résoudre dans \mathbb{R} , les équations :
 - a) $f(x) = 0$
 - b) $f(x) = 7$
 - c) $f(x) = -9$
 - d) $f(x) = -2(x-1)^2$

Exercice 26 : expression la plus adaptée

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-3)(x+7) - 2(x^2-9)$ (*expression 1*)

1. Développer $f(x)$. (*expression 2*)
2. Factoriser $f(x)$ (à partir de la forme initiale). (*expression 3*)
3. Montrer que $f(x) = -(x-2)^2 + 1$. (*expression 4*)
4. En utilisant l'expression la plus adaptée, calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(2)$, $f(\sqrt{2})$
5. En utilisant l'expression la plus adaptée, résoudre dans \mathbb{R} , les équations :
 - a) $f(x) = 0$
 - b) $f(x) = -3$
 - c) $f(x) = 1$
 - d) $f(x) = -2(x^2-9)$

Exercice 27 : différentes écritures d'une même expression

Voici deux programmes écrits en Python :

```
1 def f(x):
2     a=(x+3)**2
3     b=-a
4     c=b+4
5     return c

7 def g(x):
8     a=x+1
9     b=x+5
10    c=-a*b
11    return c
```

Remarques : **2 signifie sur Python élever au carré

1. Déterminer ce qu'affiche dans la console le programme si on tape : $f(0)$; $g(0)$; $f(-3)$; $g(-3)$; $f(1)$; $g(1)$.
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 28 : résolution d'inéquations

Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations :

i) $2x^2 \geq 5x$ ii) $-8x^2 > 2x$ iii) $-2x^2 \leq 10x$

Exercice 29 : résolution d'inéquations

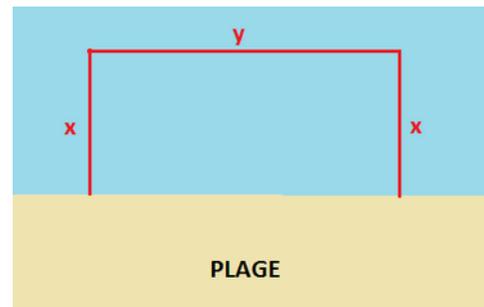
Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations :

i) $\frac{2x-3}{x+3} < 4$ ii) $\frac{-x+6}{3x-9} + 1 < 0$ iii) $2 \geq \frac{x+9}{2-x}$

Exercice 30 : résolution d'un problème

Problématique : avec une corde de longueur 60 mètres, est-il possible de délimiter une aire de baignade de 288 mètres carrés ?

On désigne par x et y les longueurs respectives du côté AB et du côté BC.



1. Exprimer y en fonction de x . (cas le plus général possible)

2. On note f la fonction donnant l'aire du rectangle en fonction de x .

Justifier que : $f(x) = 60x - 2x^2$.

3. a) Démontrer que $f(x) = -2(x - 15)^2 + 450$. (on partira du membre de droite et pas de l'égalité)

b) Répondre à la problématique de l'exercice (utiliser l'expression précédente et isoler $(x - 15)^2$ puis $x - 15$)