Correction des exercices sur le chapitre 11

Exercice 1 : démontrer l'égalité de deux expressions

Les questions sont indépendantes

1. pour tout réel x, $(2x-1)(x+7)-x^2 = 2x^2+14x-x-7-x^2 = x^2+13x-7$.

2. pour tout réel x, $(3x-1)(1-x) = 3x-3x^2-1+x = -3x^2+4x-1$

$(2x+4)x-5x^2-1 = 2x^2+4x-5x^2-1 = -3x^2+4x-1$

On en déduit que $(3x-1)(1-x) = (2x+4)x-5x^2-1$

3. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2^2+2\times2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7+4\sqrt{3}$

Exercice 2 : réduire des fractions

$$A = \frac{2x-3}{4} - \frac{1}{1} = \frac{2x-3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2x-3-4}{x} = \frac{2x-7}{x}$$

$$B = \frac{2}{1} - \frac{3x+2}{3} = \frac{2\times3}{3} - \frac{3x+2}{3} = \frac{6-(3x+2)}{3} = \frac{6-3x-2}{3} = \frac{-3x+4}{3}$$

$$C = \frac{x}{6} - \frac{5x-4}{4} = \frac{x\times2}{6\times2} - \frac{(5x-4)\times3}{4\times3} = \frac{2x-3(5x-4)}{12} = \frac{2x-15x+12}{12} = \frac{-13x+12}{12}$$

Exercice 3 : réduire des fractions

45

$$A = \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3}$$
$$= \frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$
$$= \frac{x^2+3x-x^2-2x}{(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{x}{(x+2)(x+3)}$$

$$B = \frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x}$$
$$= \frac{x\times x}{(x+1)\times x} + \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$
$$= \frac{x^2+2\,x^2+2x-x-1}{x(x+1)}$$
$$= \frac{3\,x^2+x-1}{x(x+1)}$$

$$C = \frac{x}{x-1} - x$$
$$= \frac{x}{(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$= \frac{x-x^2+x}{x-1}$$
$$= \frac{-\,x^2+2\,x}{x-1}$$

Exercice 4 : réduire des fractions-égalité de deux expressions

1.Pour tout x différent de -2,

$$5-\frac{3}{x+2}=\frac{5}{1}-\frac{3}{x+2}=\frac{5(x+2)}{x+2}-\frac{3}{x+2}=\frac{5x+10-3}{x+2}=\frac{5x+7}{x+2}$$

2.Pour tout x différent de 2,

$$2+\frac{5}{x-2}=\frac{2}{1}+\frac{5}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{5}{x-2}=\frac{2x-4+5}{x-2}=\frac{2x+1}{x-2}$$

Exercice 5 : développements

A = $(x+2)^2+(2x-1)(2x+1)=x^2+4x+4+4x^2-1=5x^2+4x+3$
B = $(x-4)(x+4)-(2x-1)^2$
$= x^2-16-(4x^2-4x+1)$
$= x^2-16-4x^2+4x-1$
$= -3x^2+4x-17$

Exercice 6 : développements

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :
A = $(2x+3)^2-(x-4)(3x+1)$
$= 4x^2+12x+9-(3x^2+x-12x-4)$
$= 4x^2+12x+9-3x^2+11x+4$
$= x^2+23x+13$
B = $(4x-2)(4x+2)-2(x-1)^2$
$= 16x^2-4-2(x^2-2x+1)$
$= 16x^2-4-2x^2+4x-2$
$= 14+4x-6$

Exercice 7 : factorisations

$A=x^2-9x=x(x-9)$

$B=(2x+1)(3x-4)-4(2x+1)(1+x)$
$=(2x+1)\big(3x-4-4(1+x)\big)$
$=(2x+1)(3x-4-4-4x)$
$=(2x+1)(-x-8)$

$C=x^2-4x+4=(x-2)^2$

$D=x^2-9=(x-3)(x+3)$

$E=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

$F=(x+1)^2-9$
$=(x+1)^2-3^2$
$=(x+1-3)(x+1+3)$
$=(x-2)(x+4)$

$G=2(x-3)(x+4)-(x^2-9)$
$=2(x-3)(x+4)-(x-3)(x+3)$

$= (x-3)\big(2(x+4)-(x+3)\big)$
$= (x-3)(2x+8-x-3)$
$= (x-3)(x+5)$

Exercice 8 : factorisations

$A = -4x^2 + 3x = x(-4x+3)$
$B = (1-x)^2 + 3(1-x)(x+2)$
$= (1-x)\big((1-x)+3(x+2)\big)$
$= (1-x)(1-x+3x+6)$
$= (1-x)(2x+7)$

$C = 4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$

$D = 100x^2 + 20x + 1 = (10x+1)^2$

$E = (3x+1)^2 - (4x-5)^2$
$= \big((3x+1)-(4x-5)\big)\big((3x+1)+(4x-5)\big)$
$= (3x+1-4x+5)(3x+4+4x-5)$
$= (-x-4)(7x-1)$
$F = 3(49x^2-16) - (7x+4)(x+1)$
$= 3(7x-4)(7x+4) - (7x+4)(x+1)$
$= (7x+4)(21x-12-x-1)$
$= (7x+4)(20x-13)$

Exercice 9 :factorisations

$A = x(3x-1) + 5x = x \times (3x-1) + x \times 5 = x\ (\ (3x-1)+5\ )\ = x(3x+4)$
, B = $(x-2)^2 - 36 = (x-2)^2 - 6^2 = (x-2+6)(x-2-6) = (x+4)(x-8)$

C = $x^2 + 2x + 1 - (x+1)(2x-5)$
$= (x+1)^2 - (x+1)(2x-5)$
$= (x+1)(x+1) - (x+1)(2x-5)$
$= (x+1)((x+1)-(2x-5))$
$= (x+1)(x+1-2x+5)$
$= (x+1)(-x+6)$

D = $(7x-3)^2 - x(7x-3)$

$= (7x-3)(7x-3) - (7x-3)x$
$= (7x-3)((7x-3)-x)$
$= (7x-3)(7x-3-x)$
$= (7x-3)(6x-3)$

E = $(2-x) - (2-x)^2$

$= (2-x) \times 1 - (2-x)(2-x)$
$= (2-x)(1-(2-x))$
$= (2-x)(1-2+x)$
$= (2-x)(x-1)$

$F = 4ab - 3cb$

$= \boldsymbol{b} \times \mathbf{4}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \mathbf{3}\boldsymbol{c}$

$= b(4a - 3c)$

Exercice 10 :factorisations

$A = (\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^{\mathbf{2}} - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4})^{\mathbf{2}}$

$= ((\boldsymbol{x} + \mathbf{5}) + (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}))((\boldsymbol{x} + \mathbf{5}) - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}))$

$= (\boldsymbol{x} + \mathbf{5} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4})(\boldsymbol{x} + \mathbf{5} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$

$= (3x + 1)(-x + 9)$

$B = x^2 + \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{9} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} \times \boldsymbol{x} \times \mathbf{3} + \mathbf{3}^{\mathbf{2}} = (\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^{\mathbf{2}}$

$\boldsymbol{C} = \mathbf{9}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{12}\boldsymbol{x} + \mathbf{4} = (\mathbf{3}\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} \times \mathbf{3}\boldsymbol{x} \times \mathbf{2} + \mathbf{2}^{\mathbf{2}} = (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}$

D$= (2x - 1)(3x + 5) - ((\mathbf{2}\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}^{\mathbf{2}})$

$= (2x - 1)(3x + 5) - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$= (2x - 1)(3x + 5) - (2x - 1)(2x + 1)$

$= (2x - 1)((3x + 5) - (2x + 1))$

$= (2x - 1)(3x + 5 - 2x - 1)$

$= (2x - 1)(x + 4)$

E= $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} \times \boldsymbol{x} \times \mathbf{1} + \mathbf{1}^{\mathbf{2}} - (x - 1)(x + 7)$

$= (x - 1)^2 - (x - 1)(x + 7)$

$= (x - 1)(x - 1) - (x - 1)(x + 7)$

$= (x - 1)((x - 1) - (x + 7))$

$= (x + 1)(x - 1 - x - 7)$

$= -8(x + 1)$

Exercice 11 :factorisations

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 1 - 49x^2$; $B = (3x - 7)^2 - 25$

C $= (2x - 4)^2 - (4x - 1)^2$; D $= x^2 + 10x + 25$

$E = (x - 7)(-x + 2) - 3(x^2 - 49)$ et F = $2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 4)$

$\boldsymbol{A} = \mathbf{1} - \mathbf{49}\boldsymbol{x}^2 = \mathbf{1}^{\mathbf{2}} - (7x)^{\mathbf{2}} = (\mathbf{1} + 7x)(\mathbf{1} - 7x)$

$\boldsymbol{B} = (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{7})^{\mathbf{2}} - \mathbf{25}$

$= (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{7})^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}^{\mathbf{2}}$

$= (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{7} + \mathbf{5})(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{7} - \mathbf{5})$

$= (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2})(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{12})$

C $= (2x-4)^2 - (4x-1)^2$

$= \left((\boldsymbol{2x-4}) + (\boldsymbol{4x-1})\right)\left((\boldsymbol{2x-4}) - (\boldsymbol{4x-1})\right)$

$= (\boldsymbol{2x-4+4x-1})(\boldsymbol{2x-4-4x+1})$

$= (\boldsymbol{6x-5})(\boldsymbol{-2x-3})$

$\boldsymbol{D = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x+5)^2}$

$E = (x-7)(-x+2) - 3(x^2 - 7^2)$

$= (x-7)(-x+2) - 3(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{7})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{7})$

$= (x-7)(-x+2) - (x-7)3(x+7)$

$= (x-7)((-x+2) - 3(x+7))$

$= (x-7)(-x+2-3x-21)$

$= (x-7)(-4x-19)$

F = $2(x^2-4x+4) + 3(x^2-4)$

= $2(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2 \times x \times 2} + \boldsymbol{2^2}) + 3(x^2-2^2)$

= $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2})^2 + 3(x+2)(x-2)$
= $(x+2)2(x-2) + (x+2)3(x-2)$
= $(x+2)(2(x-2)+3(x-2))$
= $(x+2)(2x-4+3x-6)$
= $(x+2)(5x-10)$

Exercice 12 :applications de la factorisation

1. $\boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{b^2} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

$A = 27^2 - 25^2 = (\boldsymbol{27} + \boldsymbol{25})(\boldsymbol{27} - \boldsymbol{25}) = \boldsymbol{52 \times 2 = 104}$
$B = 154^{\ 2} - 146^2 = (\boldsymbol{154} + \boldsymbol{146})(\boldsymbol{154} - \boldsymbol{146}) = \boldsymbol{300 \times 8 = 2400}$
$C = 200\,006^2 - 200\,004^2 = (\boldsymbol{200\,006} + \boldsymbol{200\,004})(\boldsymbol{200\,006} - \boldsymbol{200\,004}) =$
$\boldsymbol{400\,010 \times 2 = 800\,020}$

2. $A = 0{,}8^{n+1}$ et $B = 0{,}8^n$. (n est un entier naturel)

$A - B = 0{,}8^{n+1}$-$0{,}8^n$
$= 0{,}8^n \times 0{,}8^1 - 0{,}8^n$
$= 0{,}8 \times 0{,}8^n - 0{,}8^n$
$= (0{,}8-1) \times 0{,}8^n$
$= -0{,}2 \times 0{,}8^n$.

Or $0{,}8^n > 0$ et $-0{,}2 < 0$.
On en déduit que : $0{,}8^{n+1}$-$0{,}8^n < 0$
On en déduit que $0{,}8^{n+1}$<$0{,}8^n$

Exercice 13 :des factorisations plus complexes (spé maths)

1.

$A = (2x-1)^2 - 9(2-x)^2$
$= (2x-1)^2 - 3^2(2-x)^2$
$= (2x-1)^2 - (3(2-x))^2$
$= (2x-1)^2 - (6-3x)^2$
$= ((2x-1)+(6-3x))((2x-1)-(6-3x))$
$= (2x-1+6-3x)(2x-1-6+3x)$
$= (-x+5)(5x-7)$

$B= 4(x-1)^2 - 9$
$= 2^2(x-1)^2 - 3^2$
$= (2(x-1))^2 - 3^2$
$= (2x-2)^2 - 3^2$
$= (2x-2-3)(2x-2+3)$
$= (2x-5)(2x+1)$

$C \quad = (x^2-9)(2x-1) - (x-3)^2$
$= (x-3)(x+3)(2x-1) - (x-3)(x-3)$
$= (x-3)((x+3)(2x-1) - (x-3))$
$= (x-3)(2x^2 - x + 6x - 3 - x + 3)$
$= (x-3)(2x^2 + 4x)$
$= x(x-3)(2x+4)$

$D = -6x + 10x^2 + (3-5x)^2$;
$= -2x(3-5x) + (3-5x)(3-5x)$
$= (3-5x)(-2x+3-5x)$
$= (3-5x)(-7x+3)$

$E = 7x(5-x) + (x+1)(x-5)$
$= -7x(x-5) + (x+1)(x-5)$
$= (x-5)(-7x+x+1)$
$= (x-5)(-6x+1)$

2.

$A = x^3 - 9x = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3)$
$B = 4x^2 - 5 = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$
$C = x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

3.$A = (x+2)^2 - (2x-1)^2$
$= ((x+2)-(2x-1))((x+2)+(2x-1))$
$= (x+2-2x+1)(x+2+2x-1)$
$= (-x+3)(3x+1)$

$B = x^2 + 6x + 9 - 4(x^2 - 2x + 1)$
$= (x+3)^2 - 4(x-1)^2$
$= (x+3)^2 - 2^2(x-1)^2$
$= (x+3)^2 - (2(x-1))^2$

$C = 2(x+1)(x-3) - 5(x-3)(3x+1)$
$= (x-3)(2(x+1) - 5(3x+1))$
$= (x-3)(2x+2-15x-5)$
$= (x-3)(-13x-3)$

$D = -3(4x^2 - 9) + (2x - 3)(-x + 5)$
$\quad = -3(2x - 3)(2x + 3) + (2x - 3)(-x + 5)$
$\quad = (2x - 3)(-3(2x + 3) + (-x + 5))$
$\quad = (2x - 3)(-6x - 9 - x + 5)$
$\quad = (2x - 3)(-7x - 4)$

$E = (x^2 - 16)(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 8x + 16)$
$\quad = (x - 4)(x + 4)(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 1)(x + 4)^2$
$\quad = (x + 4)(x - 1)((x - 4)(x - 1) - (x + 1)(x + 4))$
$\quad = (x + 4)(x - 1)(x^2 - x - 4x + 4 - x^2 - 4x - x - 4)$
$\quad = (x + 4)(x - 1)(-10x)$

Exercice 14 : équations produit nul

1.Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(3x + 9)(4x - 2) = 0$

2.Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(5x + 1)(3 - 2x) = 0$

3.Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x(x - 1)(-2x + 7) = 0$

Exercice 15 : équations produit nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $(5x - 3)(2 - 3x) = 0$ **b)** $3x(2x - 7) = 0$

c) $-3x^2(2x - 7) = 0$ **d)** $(-3x + 1)^2 = 0$

e) $x^2(x - 1)(-3 - 2x) = 0$ **f)** $(x - 1)(2x + 3)(x - 4) = 0$

Exercice 16 : équations quotient nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

i)$\frac{2x-6}{x-9} = 0$

$ii)$ $\frac{-4x+1}{2x-3} = 0$

Exercice 17 :résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

i) $x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x \times x - x \times 5 = 0$ $\quad ka - kb = k(a - b)$

$\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = 5$ $\quad S = \{0 ; 5\}$

ii) $-3x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x \times -3x + x \times 1 = 0$ $\quad ka + kb = k(a + b)$

$\Leftrightarrow x(-3x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \; ou -3x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \; ou -3x=-1$

$\Leftrightarrow x=0 \; ou \;\; x=\frac{1}{3}$ $\quad S=\{0\,;\frac{1}{3}\}$

iii) $\quad 4x^2=28x$

$\Leftrightarrow 4x^2-28x=0$

$\Leftrightarrow 4x\times x-4x\times 7=0$ $\qquad ka-kb=k(a-b)$

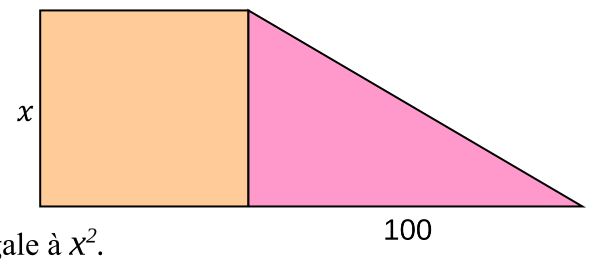
$\Leftrightarrow 4x(x-7)=0$

$\Leftrightarrow 4x=0 \; ou \;\; x-7=0$

$\Leftrightarrow x=0 \; ou \;\; x=7$ $\quad S=\{0\,;7\}$

Exercice 18 :résolution d'un problème (https://youtu.be/flObKE_CyHw)

On désigne par x la longueur du côté commun.
Les données sont représentées sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.

L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2} = 50x$

Les deux champs étant de surface égale, le problème peut se ramener à résoudre l'équation :
$x^2 = 50x$

Soit $x^2 - 50x = 0$

$\Leftrightarrow \; x(x-50) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 50 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = 50$

La première solution ne convient pas à la situation du problème, on en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50 m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesure 100 m et 50 m.

Exercice 19 :résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

i) $(x-1)(x+3) = 2(x-1)(2x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) - 2(x-1)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) \times (x+3) - (x-1)2(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\big((x+3) - 2(2x-1)\big) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3-4x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-3x+5) = 0$

$\Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $-3x+5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $-3x = -5$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{5}{3}$ L'ensemble des solutions est S = $\{ 1 ; \frac{5}{3}\}$

ii) $5x(3x+2) = (3x+2)^2$

$\Leftrightarrow 5x(3x+2) - (3x+2)(3x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (3x+2) \times 5x - (3x+2)(3x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (3x+2)\big(5x - (3x+2)\big) = 0$

$\Leftrightarrow (3x+2)(5x-3x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (3x+2)(2x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x+2 = 0$ ou $2x-2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x = -2$ ou $2x = 2$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$ L'ensemble des solutions est S = $\{-\frac{2}{3} ; 1\}$

Exercice 20:résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

i) $x(1-5x) = 1-5x$
$\Leftrightarrow x(1-5x) - (1-5x) = 0$
$\Leftrightarrow (1-5x) \times x - (1-5x) \times 1 = 0$
$\Leftrightarrow (1-5x)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow 1-5x = 0 \; ou \;\; x-1 = 0$
$\Leftrightarrow -5x = -1 \; ou \;\; x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \; ou \;\; x = 1$ S= $\{\frac{1}{5} ; 1\}$

$ii)(8x-3)^2 = 49$
$\Leftrightarrow (8x-3)^2 - 7^2 = 0$
$\Leftrightarrow (8x-3-7)(8x-3+7) = 0$

$\Leftrightarrow (8x-10)(8x+4) = 0$

$\Leftrightarrow 8x-10 = 0$ ou $8x+4 = 0$

$\Leftrightarrow 8x = 10$ ou $8x = -4$

$\Leftrightarrow x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ ou $x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ L'ensemble des solutions de l'équation est S= $\{\frac{5}{4} ; -\frac{1}{2}\}$

iii) $(4x+1)^2 = x^2$
$\Leftrightarrow (4x+1)^2 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow ((4x+1)+x)((4x+1)-x) = 0$
$\Leftrightarrow (5x+1)(3x+1) = 0$
$\Leftrightarrow 5x+1 = 0 \; ou \;\; 3x+1 = 0$
$\Leftrightarrow 5x = -1 \; ou \;\; 3x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \; ou \;\; x = -\frac{1}{3}$ S= $\{-\frac{1}{5} ; -\frac{1}{3}\}$

Exercice 21 :résolution d'équations se ramenant à une équation produit nul

i) $x^2 - 9 = 2(x+3)$
$\Leftrightarrow x^2 - 9 - 2(x+3) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 3^2 - 2(x+3) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) - 2(x+3) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) - (x+3) \times 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)((x-3)-2) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-5) = 0$
$\Leftrightarrow x+3 = 0 \; ou \;\; x-5 = 0$
$\Leftrightarrow x = -3 \; ou \;\; x = 5$ S= $\{-3; 5\}$

ii) $(2x+3)^2 = (x-1)^2$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(2x+3)^2 - (x-1)^2 = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\big((2x+3)+(x-1)\big)\big((2x+3)-(x-1)\big) = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(2x+3+x-1)(2x+3-x+1) = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(3x+2)(x+4) = 0}$
$\Leftrightarrow 3x+2 = 0 \; ou \;\; x+4 = 0$
$\Leftrightarrow 3x = -2 \; ou \;\; x+4 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \; ou \;\; x = -4$ S= $\{-\frac{2}{3}; -4\}$

iii) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+1)$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 4x + 4 - (x-2)(x+1) = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - (x-2)(x+1) = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x-2)^2 - (x-2)(x+1) = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x-2)(x-2) - (x-2)(x+1) = 0 \;\; 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{(x-2)((x-2)-(x+1)) = 0}$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-2-x-1) = 0$
$\Leftrightarrow -3(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x-2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \quad S = \{2\}$

Exercice 22 : résolution algébrique d'équations du type *x²=a*

i) $x^2 = 2$
S= $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

ii) $x^2 = 5$
S= $\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$

iii) $x^2 = -1$

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions car un nombre positif ne peut pas etre égal à un nombre négatif. S= $\emptyset$

2. Résoudre en utilisant vos connaissances dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(5x+3)^2 = 16$

• **Lorsque $a > 0$,** l'équation $x^2 = a$ est équivalente à $x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$.
Lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

$(5x+3)^2 = 16$ équivaut à $5x+3 = \sqrt{16}$ ou $5x+3 = -\sqrt{16}$

équivaut à $5x+3 = 4$ ou $5x+3 = -4$

équivaut à $5x = 4-3$ ou $5x = -4-3$

équivaut à $5x = 1$ ou $5x = -7$

équivaut à $x = \frac{1}{5}$ ou $x = -\frac{7}{5}$ L'ensemble des solutions de l'équation est S=$\{\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}\}$

<u>Exercice 23 :résolution d'équations se ramenant à une équation quotient nul</u>

i) $\frac{x^2-1}{x+3} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \quad et \quad x+3 \neq 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 \quad et \quad x \neq -3$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{1}\, ou - \sqrt{1} \quad et \quad x \neq -3$
$\Leftrightarrow x = 1\, ou - 1 \quad et \quad x \neq -3$ $\quad S = \{-1\,;1\}$

ii) $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \quad et \quad x+2 \neq 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad et \quad x \neq -2$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{4}\, ou - \sqrt{4} \quad et \quad x \neq -2$
$\Leftrightarrow x = 2\, ou - 2 \quad et \quad x \neq -2$ $\quad S = \{2\}$

iii) $\frac{3x-2}{x} = \frac{3x+6}{x+1}$
$\Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} - \frac{3x+6}{x+1} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{(3x-2)(x+1)}{x(x+1)} - \frac{(3x+6)x}{(x+1)x} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^2+3x-2x-2-3x^2-6x}{x(x+1)} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{-5x-2}{x(x+1)} = 0$
$\Leftrightarrow -5x - 2 = 0 \quad et \quad x(x+1) \neq 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \quad et \quad x \neq -1\, et\, 0$ S= $\{-\frac{2}{5}\}$

iv) $\frac{x^2-6x+9}{(x+1)(x-3)} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \quad et \quad (x+1)(x-3) \neq 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \quad et \quad x+1 \neq 0\, et\, x-3 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \quad et \quad x \neq -1\, et\, x \neq 3$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \quad et \quad x \neq -1\, et\, 3$
$\Leftrightarrow x = 3 \quad et \quad x \neq -1\, et\, 3$ S= $\emptyset$

v) $\frac{x-4}{2x+3} = \frac{2x+3}{x-4}$
$\Leftrightarrow \frac{x-4}{2x+3} - \frac{2x+3}{x-4} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-4)}{(2x+3)(x-4)} - \frac{(2x+3)(2x+3)}{(x-4)(2x+3)} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2-(2x+3)^2}{(2x+3)(x-4)}=0$ $\quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$\Leftrightarrow \frac{((x-4)+(2x+3))((x-4)-(2x+3))}{(2x+3)(x-4)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(-x-7)}{(2x+3)(x-4)}=0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(-x-7)=0 \;\; et \;\; (2x+3)(x-4)\neq 0$

$\Leftrightarrow 3x-1=0 \; ou -x-7=0 \quad et \quad 2x+3\neq 0 \; et \; x-4\neq 0$

$\Leftrightarrow 3x=1 \; ou -x=7 \quad et \quad 2x\neq -3 \; et \; x\neq 4$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \; ou \;\; x=-7 \quad et \quad x\neq -\frac{3}{2} \; et \; x\neq 4$ $\quad$ S={$\frac{1}{3}$; -7 }

vi) $\frac{x^2-8}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-8}{(x-3)(x-2)}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-8}{(x-3)(x-2)}-\frac{x-2}{(x-3)(x-2)}+\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-8-x+2+x-3}{(x-3)(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{(x-3)(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow x^2-9=0 \;\; et \;\; (x-3)(x-2)\neq 0$

$\Leftrightarrow x^2=9 \;\; et \;\; x\neq 3 \; et \; 2$

$\Leftrightarrow x=-3 \; ou \; x=3 \;\; et \;\; x\neq 3 \; et \; 2$

S={-3}

vii) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{36}{x^2-9}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}-\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)}-\frac{36}{(x-3)(x+3)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-(x-3)^2-36}{(x-3)(x+3)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9-(x^2-6x+9)-36}{(x-3)(x+3)}=0$

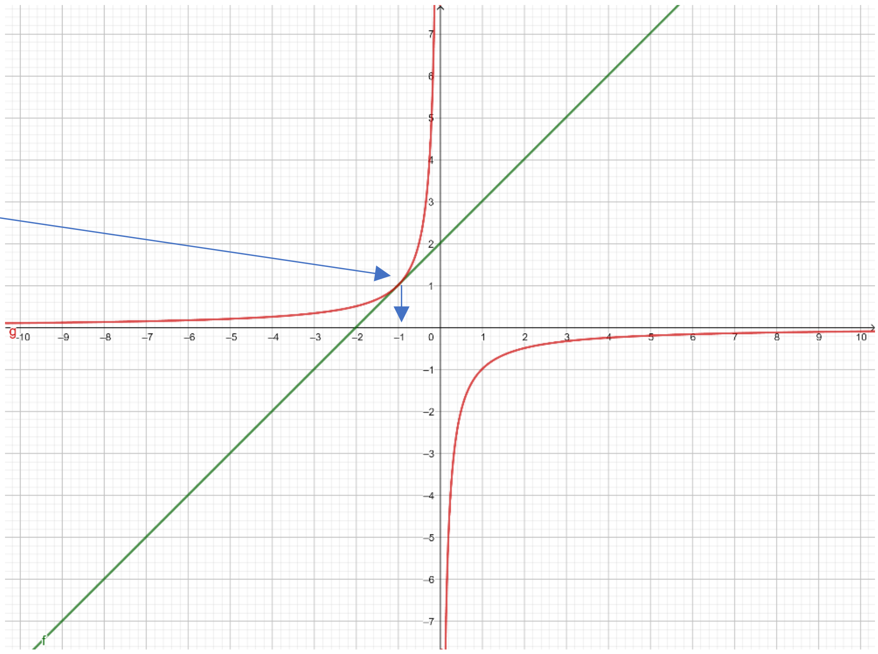
$\Leftrightarrow \frac{12x-36}{(x-3)(x+3)}=0$

$\Leftrightarrow 12x-36=0 \;\; et \;\; (x-3)(x+3)\neq 0$

$\Leftrightarrow x=3 \;\; et \;\; x\neq 3 \; et -3$

Exercice 24 :

Exercice 24 :



1.

$S = \{-1\}$

2.

$x + 2 = -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x + 2 + \frac{1}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x} = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \; et \; x \neq 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \; et \; x \neq 0$
$\Leftrightarrow x = -1 \; et \; x \neq 1 \quad S = \{-1\}$

Exercice 25 : expression la plus adaptée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-1)^2 + 3(x-1)(x-3)$ ***(expression 1)***

1. $f(x) = -2(x-1)^2 + 3(x-1)(x-3)$

$= -2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) + 3(x^2 - 3x - x + 3)$

$= -2(x^2 - 2x + 1) + 3(x^2 - 4x + 3)$

$= -2x^2 + 4x - 2 + 3x^2 - 12x + 9$

$= x^2 - 8x + 7$ ***(expression 2)***

2. $f(x) = -2(x-1)(x-1) + 3(x-1)(x-3)$

$= (x-1)(-2)(x-1) + (x-1)3(x-3)$ $\qquad \boldsymbol{k\,a - kb = k(a - \,b\,)}$
$= (x-1)((-2)(x-1) + 3(x-3))$
$= (x-1)(-2x + 2 + 3x - 9)$
$= (x-1)(x-7)$ ***(expression 3)***

3. $(x-4)^2 - 9 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 9 = x^2 - 8x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7 = f(x)$.

$f(x) = (x-4)^2 - 9.$ ***(expression 4)***

4.
$f(0) = 0^2 - 8 \times 0 + 7 = 7$
$f(1) = (1-1)(1-7) = 0$
$f(4) = (4-4)^2 - 9 = -9$
$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 8\sqrt{2} + 7 = 2 - 8\sqrt{2} + 7 = 9 - 8\sqrt{2}$

5. En utilisant l'expression la plus adaptée, résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

a) $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-7) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \;\; ou \;\; x - 7 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \;\; ou \;\; x = 7 \qquad S = \{1\,;7\}$

b) $f(x) = 7$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 7$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$
$\Leftrightarrow x \times x - x \times 8 = 0$
$\Leftrightarrow x(x-8) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ x = 8 \qquad S = \{0; 8\}$

c) $f(x) = -9$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 - 9 = -9$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = 4 \qquad S = \{4\}$

d) $f(x) = -2(x-1)^2$
$\Leftrightarrow -2(x-1)^2 + 3(x-1)(x-3) = -2(x-1)^2$
$\Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \ \ ou \ x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \ \ ou \ x = 3 \qquad S = \{1; 3\}$

Exercice 26 : expression la plus adaptée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+7) - 2(x^2-9)$***(expression 1)***

1. $f(x) = (x-3)(x+7) - 2(x^2-9)$

$= x^2 + 7x - 3x - 21 - 2x^2 + 18$

$= -x^2 + 4x - 3$ ***(expression 2)***

2. $f(x) = (x-3)(x+7) - 2(x^2 - 3^2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$
$= (x-3)(x+7) - 2(x+3)(x-3)$
$= (x-3)(x+7) - (x-3)2(x+3)$ $\qquad$ $\boldsymbol{k\,a - kb = k(a - b)}$
$= (x-3)(x+7-2(x+3))$
$= (x-3)(x+7-2x-6)$
$= (x-3)(-x+1)$ ***(expression 3)***

3. $-(x-2)^2 + 1 = -(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) + 1$
$= -(x^2 - 4x + 4) + 1$
$= -x^2 + 4x - 4 + 1$
$= -x^2 + 4x - 3$
$= f(x).$

$f(x) = -(x-2)^2 + 1.$ ***(expression 4)***

4.
$f(0) = -0^2 + 4 \times 0 - 3 = -3$
$f(3) = (3-3)(-3+1) = 0$
$f(2) = -(2-2)^2 + 1 = 1$
$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}^2 + 4\sqrt{2} - 3 = -2 + 4\sqrt{2} - 3 = -5 + 4\sqrt{2}$

5. En utilisant l'expression la plus adaptée, résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

$a)\ f(x) = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(-x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \ \ ou \ \ -x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3 \ \ ou \ \ x = 1 \qquad S = \{1\,;3\}$

$b) f(x) = -3$
$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = -3$
$\Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0$
$\Leftrightarrow x \times (-x) + x \times 4 = 0$
$\Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ou -x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \; x = 4 \qquad S = \{0; 4\}$

$c) f(x) = 1$
$\Leftrightarrow -(x-2)^2 + 1 = 1$
$\Leftrightarrow -(x-2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \qquad S = \{2\}$

$d) f(x) = -2(x^2 - 9)$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+7) - 2(x^2 - 9) = -2(x^2 - 9)$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+7) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \;\; ou \; x + 7 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3 \;\; ou \; x = -7 \qquad S = \{-7; 3\}$

Exercice 27 : différentes écritures d'une même expression

1. $f(0) = g(0)$; $f(-3) = g(-3)$; $f(1) = g(1)$.
2.Conjecture : il semble que pour tout réel $x, f(x) = g(x)$.
3.Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+3)^2 + 4 \\ &= -(x^2 + 6x + 9) + 4 \\ &= -(x^2 + 6x + 9) + 4 \\ &= -x^2 - 6x - 9 + 4 \\ &= -x^2 - 6x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x+1)(x+5) \\ &= -(x^2 + 5x + x + 5) \\ &= -x^2 - 6x - 5 \end{aligned}$$

Il est clair que $f(x) = g(x)$.

Exercice 28 : résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$,les inéquations :

i)$2x^2 \geq 5x$ ii) $-8x^2 > 2x$ *iii)*$-2x^2 \leq 10x$

$i) 2x^2 \geq 5x$ équivaut à $2x^2 - 5x \geq 0$

équivaut à $x \times 2x - 5 \times x \geq 0$

équivaut à $x \times (2x - 5) \geq 0$

$2x - 5 = 0$ équivaut à $2x = 5$ équivaut à $x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$2x-5$		-		-	0	+	
$x \times (5x-2)$		+	0	-	0	+	

$x \times (2x - 5) \geq 0 \;\; si \; x \leq 0 \; ou \; x \geq 5/2$ S=$]-\infty; 0] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[$

$ii) -8x^2 > 2x$ équivaut à $-8x^2 - 2x > 0$ *équivaut à* $x(-8x-2) > 0$

$-8x - 2 = 0$ équivaut à $-8x = 2$ équivaut à $x = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
x		-	0	-		+	
$-8x-2$		+	0	-		-	
$x \times (-8x-2)$		-	0	+	0	-	

$x(-8x+2) > 0 \quad si\ 0 < x < \frac{1}{4}$ S=]0; $\frac{1}{4}$[

$iii) -2x^2 \leq 10x$ équivaut à $-2x^2 - 10x \leq 0$ *équivaut à* $x(-2x-10) \leq 0$

$-2x - 10 = 0$ équivaut à $-2x = 10$ équivaut à $x = -5$

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
x		-	0	-		+	
$-2x-10$		+	0	-		-	
$x \times (-2x-10)$		-	0	+	0	-	

$x(-2x-10) \leq 0\ si\ x \leq -5\ 0\ ou\ x \geq 0$ S=] $- \infty; -5]$ ∪ $[0; +\infty[$

<u>Exercice 29 : résolution d'inéquations</u>

i) $\frac{2x-3}{x+3} < 4$ $\quad$ *équivaut à* $\frac{2x-3}{x+3} - 4 < 0$

équivaut à $\frac{2x-3}{x+3} - \frac{4(x+3)}{x+3} < 0$

équivaut à $\frac{2x-3-4(x+3)}{x+3} < 0$

équivaut à $\frac{2x-3-4x-12}{x+3} < 0$

équivaut à $\frac{-2x-15}{x+3} < 0$

$-2x - 15 = 0$ équivaut à $-2x = 15$ équivaut à $x = -\frac{15}{2}$

$x + 3 = 0$ équivaut à $x = -3$

x	$-\infty$		$-\frac{15}{2}$		-3		$+\infty$
$-2x-15$		+	0	-		-	
$x+3$		-		-	0	+	
$\frac{-2x-15}{x+3}$		-	0	+	||	-	

$\frac{-2x-15}{x+3} < 0$ S=]-∞ ; $-\frac{15}{2}$[$\cup$]$-3; +\infty$[

ii) $\frac{-x+6}{3x-9} + 1 < 0$

$\frac{-x+6}{3x-9} + 1 > 0$ *équivaut* à $\frac{-x+6}{3x-9} + \frac{3x-9}{3x-9} < 0$

équivaut à $\frac{-x+6+3x-9}{3x-9} < 0$

équivaut à $\frac{2x-3}{3x-9} < 0$

$2x-3=0$ équivaut à $2x=3$ équivaut à $x=\frac{3}{2}$

$3x-9=0$ équivaut à $3x=9$ équivaut à $x=3$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x-3$		-	0	+		+	
$3x-9$		-		-	0	+	
$\frac{2x-3}{3x-9}$		+	0	-	||	+	

$\frac{2x-3}{3x-9} < 0$ S=]$\frac{3}{2}$; 3[

iii)$2 \geq \frac{x+9}{2-x}$ *équivaut* à $2 - \frac{x+9}{2-x} \geq 0$

équivaut à $\frac{2(2-x)-(x+9)}{2-x} \geq 0$

équivaut à $\frac{-5-3x}{2-x} \geq 0$

$-5-3x=0$ équivaut à $-3x=5$ équivaut à $x=-\frac{5}{3}$

$2-x=0$ équivaut à $x=2$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$-5-3x$	+	0	-		-	
$2-x$	+		+	0	-	
$\frac{-5-3x}{2-x}$	+	0	-		+	

$\frac{-5-3x}{2-x} \geq 0$ S=]S=]-∞ ; $-\frac{5}{3}$] ∪]2; +∞[

Exercice 30 : résolution d'un problème

Problématique : avec une corde de longueur 60 mètres, est il possible de délimiter une aire de baignade de 288 mètres carrés ?

On désigne par *x* et *y* les longueurs respectives du côté AB et du coté BC.

1. $2x + y = 60$ d'où $y = 60 - 2x$.

2. On note f la fonction donnant l'aire du rectangle en fonction de x.
$f(x) = xy = x(60-2x) = 60x - 2x^2$.

3. a)
$$\begin{aligned} -2(x-15)^2 + 450 &= -2(x^2 - 2 \times x \times 15 + 15^2) + 450 \\ &= -2(x^2 - 30x + 225) + 450 \\ &= -2x^2 + 60x - 450 + 450 \\ &= -2x^2 + 60x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b)On résout l'équation $f(x) = 288$

$-2(x-15)^2 + 450 = 288$

-450 -450

$-2(x-15)^2 = -162$

$(x-15)^2 = 81$

$x - 15 = 9 \ ou \ x - 15 = -9$

$x = 9 + 15 = 24 \ ou \ x = -9 + 15 = 6$.

Conclusion :avec une corde de longueur 60 mètres, il est possible de délimiter une aire de baignade de 288 mètres carrés .Pour cela , on peut construire un rectangle de cotés $x = 6m$ et $y = 60 - 12 = 48m$ ou bien de cotés $x = 24m$ et $y = 60 - 48 = 12m$