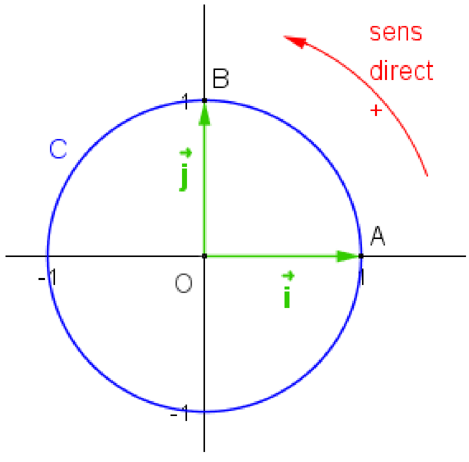
CHAPITRE 9 – calcul vectoriel- produit scalaire

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877).
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I. Cercle trigonométrique et radian

Vidéo : mathssa.fr/trigo (3mns 30s)



1.Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

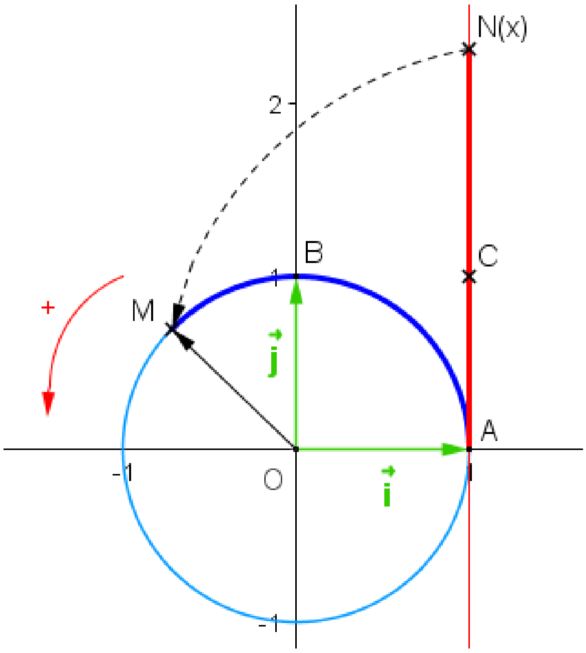
Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2.Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A\,;\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

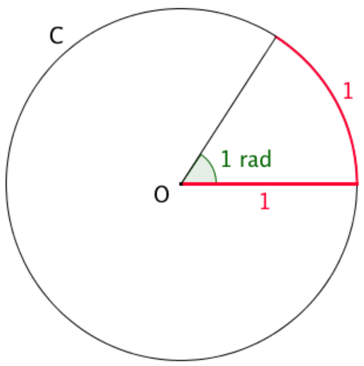


3.Le radian

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 3mns32 à 8mns35s)

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :
On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4.Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement
vidéo : mathssa.fr/angle (6mns42s)
1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.
2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

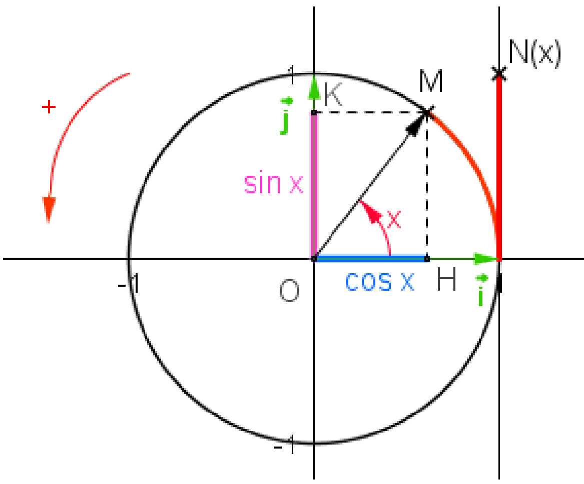
1) $\alpha = \frac{2\pi\times 33}{360} = \frac{11\pi}{60}$ 2) $\beta = \frac{3\pi\times 360}{8} = 135°$

II- Cosinus et sinus d'un angle

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 11mns 45s à 18mns12s)

1.Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x. À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions :
- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** *x ou cos(x)*.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** *x ou sin(x)*.

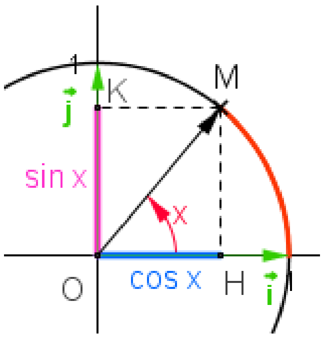
2.Propriétés immédiates:

Propriétés :

1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$
4) $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ où k entier relatif
5) $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ où k entier relatif

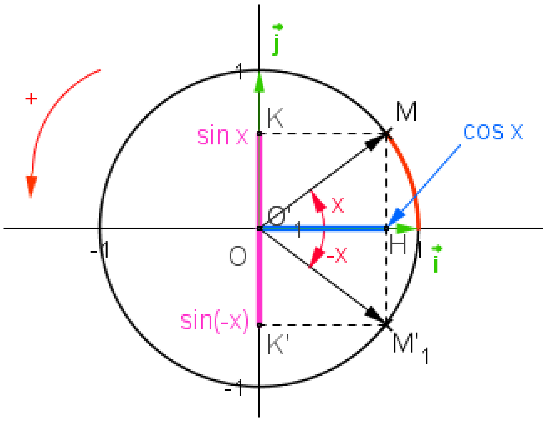
Remarque : $(sin(x))^2$, par exemple, se note $sin^2(x)$

Démonstrations :



1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2 = 1$.



3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

3.Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque :il faut absolument connaître ces valeurs par coeur ou utiliser un procédé mnémotechnique : par exemple on remplit d'abord la 2ème colonne, en écrivant $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ et $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ puis pour les cosinus , on fait décroître l'entier à l'intérieur de la racine et pour le sinus , on augmente l'entier à l'intérieur de la racine.

Utilisation de la calculatrice : Pour effectuer des calculs trigonométriques à l'aide de la calculatrice, il faut préalablement sélectionner l'unité de mesure d'angle (radian ou degré).Quand l'unité n'est pas précisé , on considère que l'angle est en radian . Exemple : $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, tan(25°) ≈0,466

III- Définition et propriétés du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 0 à 5mns20s)

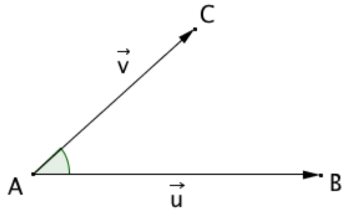
1.Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2.Définition du produit scalaire- 1ère expression du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, dans le cas contraire.



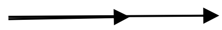
$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

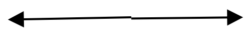
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,
  $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

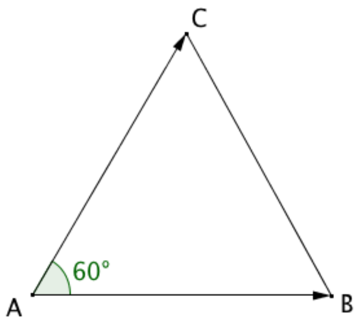


- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.
Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
$= a \times a \times \cos(60)$
$= 0{,}5a^2$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

3.Carré scalaire :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le réel : $\vec{u}.\vec{u}$. Ce réel est aussi noté $\vec{u}^2$.
Ainsi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

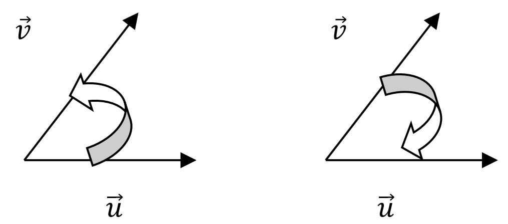
4. Propriété de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire – identités remarquables

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (5mns20s à 7mns 20s)

Propriété de symétrie :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :
On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\,;\,\vec{u})\big)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\,;\,\vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$



Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Preuve : Admis –

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) \quad = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} \quad = \quad \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

5. Une 2ème expression du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 7mns20s à 10mns 20s)

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

Et $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Démonstration de la première formule :
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \ = (\vec{u} - \vec{v})^2 \ = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \ = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Soit $2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
Et $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

Démonstration :

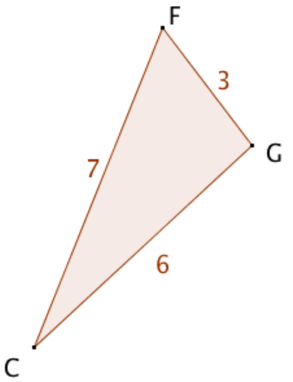
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \quad or\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.



$$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - FG^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(36 + 49 - 9)$$

$$= 38$$

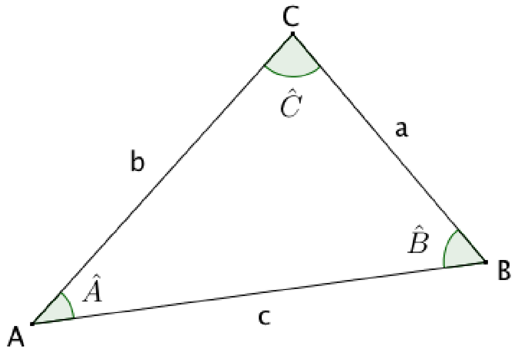
6. Théorème d'Al Kashi

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 10mns20s à 11mns 50s)

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte.
Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

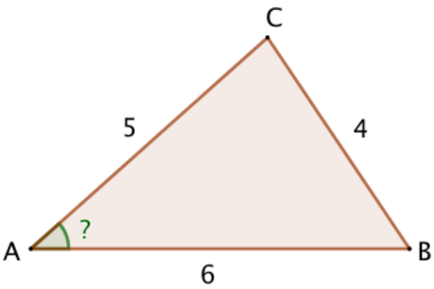


Démonstration au programme :

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$
$= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$
$= BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$
$= BA^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + AC^2$
$= c^2 - 2cbcos(\hat{A}) + b^2$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

Video : mathssa.fr/alkashi (5mns)
On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

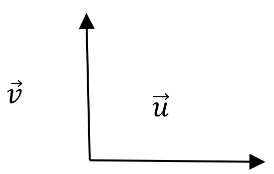
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC})$
$16 = 36 + 25 - 60\cos(\widehat{BAC})$
$60\cos(\widehat{BAC}) = 36 + 25 - 16$

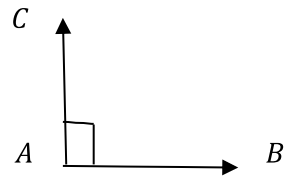
$60\cos(\widehat{BAC}) = 45$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{45}{60}$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

IV. Produit scalaire et orthogonalité :

1.Vecteurs orthogonaux

vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 11mns50s à 16mns30s)





Définition
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que
$soit\ \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
$soit$ les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

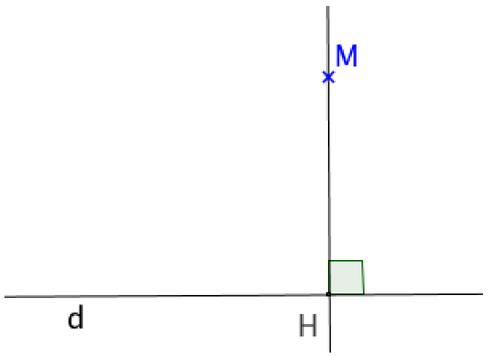
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2.Projection orthogonale – 3ème expression du produit scalaire

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.

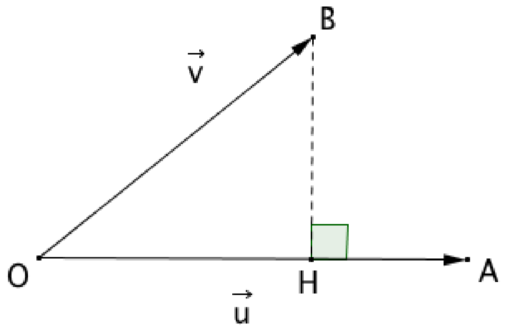
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).



On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Démonstration :

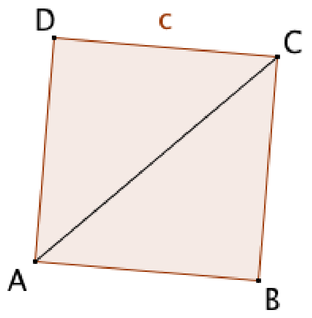
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$

$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$ or les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

video :mathssa.fr/prodscal2 (3mns)



Soit un carré ABCD de côté $c=4$.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

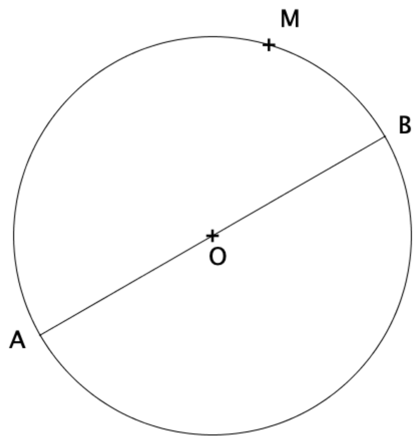
a) Par projection, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 16$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} =\ 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

3.Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété :
L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

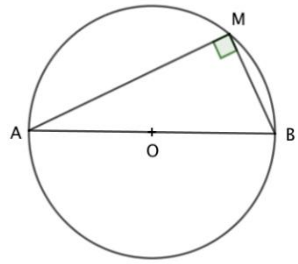
Démonstration au programme : vidéo :mathssa.fr/prodscal4



Soit O le milieu du segment [AB].
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$
Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$
$\Leftrightarrow MO^2 = OA^2$
$\Leftrightarrow MO = OA.$
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété :
Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux



<u>4.Produit scalaire dans un repère orthonormé – 4ème expression du produit scalaire</u>

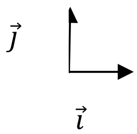
Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 16mns 30s à 18mns40s)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

<u>Propriété :</u>
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

<u>Démonstration :</u>

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})\\ &= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}\\ &= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2\\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$



car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

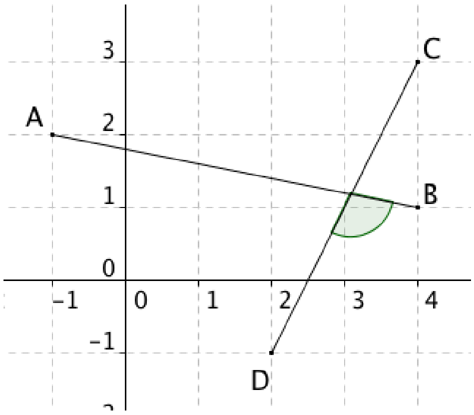
<u>Méthode :</u> Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

<u>Méthode :</u> Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal3 (9mns5s)



Calculer la mesure de l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.
A(-1 ;2)   B(4 ;1)   C(4 ;3)   D(2 ;-1)

On a : $\overrightarrow{AB}(5;-1)$ $\overrightarrow{CD}(-2;-4)$ $AB = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ $CD = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -10 + 4 = -6$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times cos(\alpha) = \sqrt{26} \times \sqrt{20} \times cos(\alpha) = \sqrt{520} \times cos(\alpha)$

On en déduit que $\sqrt{520} \times cos(\alpha) = -6$ soit $cos(\alpha) = -\frac{6}{\sqrt{520}} = -\frac{6\sqrt{520}}{520} = -\frac{3\sqrt{130}}{130}$

$\alpha = cos^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{130}}{130}\right) \approx 105°$

Revoir les points essentiels