BACCALAUREAT BLANC

<u>Lundi 17 mars 2025</u>

Mathématiques

<u>Durée de l'épreuve : 4 heures</u>

Le sujet comporte 4 exercices.

L'usage de la calculatrice est autorisé après passage en mode examen devant le surveillant, pour cela, la calculatrice étant éteinte, appuyer simultanément sur les touches [annul] et [entrer], puis sur [on].

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>Exercice 1 (4 points)</u>

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend deux questions indépendantes. Pour chacune de ces deux questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. Un professeur enseigne la spécialité Mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.
Il veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-il former un tel groupe de 5 élèves.
   a. 31^5 b. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ c. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ d. $\binom{31}{5}$

2. Le professeur s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :
   - 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie
   - 20 élèves ont choisi la spécialité SES
   - 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Il veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façon peut-il former un tel groupe ?
   a. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ b. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ c. $\binom{20}{3}$ d. $20^3 \times 11^2$

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère l'équation $\ln(x-7) + \ln(x - 2\,401) = 5\ln(7)$.
- **Affirmation 1 :** « L'équation a deux solutions 0 et $2\,408$ ».

2. Soit n un entier naturel.
- **Affirmation 2 :** « L'inéquation $0{,}89^n \leq 0{,}000\,001$ a pour solutions les entiers naturels supérieurs ou égaux à 139 »

3. On considère la fonction f définie sur par $f(x) = \frac{-5x^2}{e^{x^2}}$

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 2 (6 points)

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égalé à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égalé à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

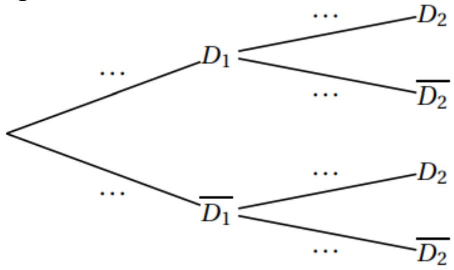
- D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement ;
- p_n la probabilité de l'événement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement, quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n)

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

On pourra s'aider d'un arbre.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.
   b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Recopier et compléter le script Python afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite p dépasse 0,66.

```python
def seuil():
    p=1/3
    n=1
    while .....
        p=...
        n=....
    return n
```

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe exacte égale à $\frac{3}{4}$.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de déplacements sur la droite. Déterminer en justifiant la loi suivie par X.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? on arrondira le résultat à 10^{-3} prés.

<u>Exercice 3 (5 points)</u>

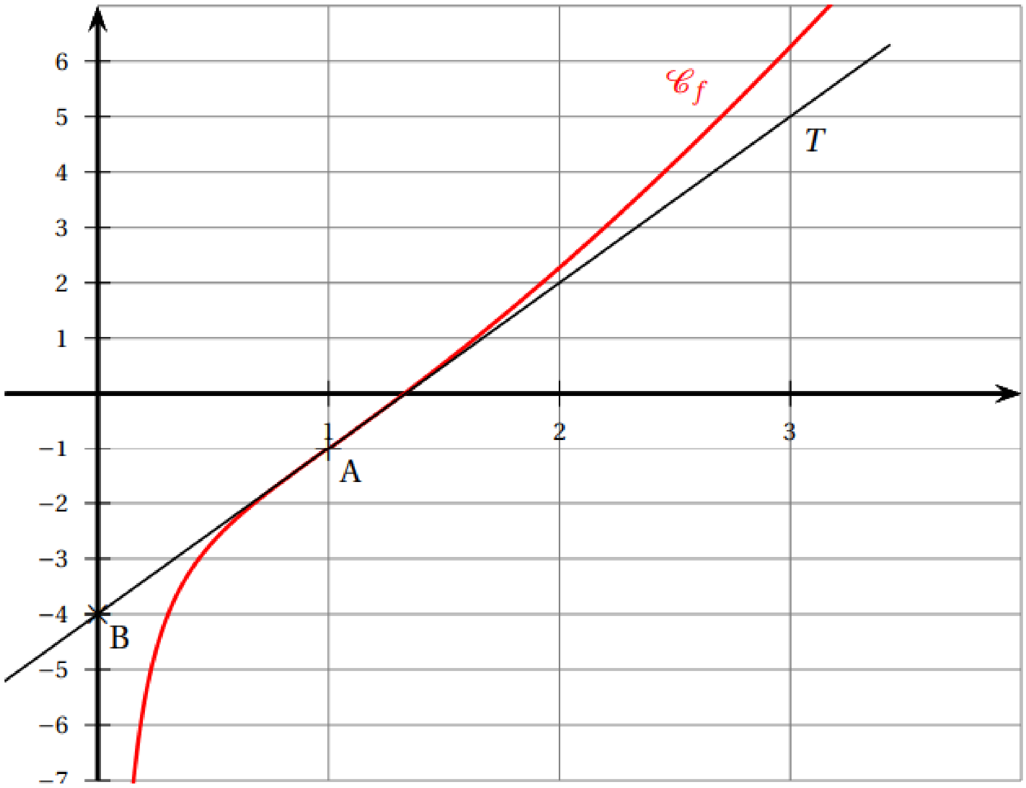
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}\ .$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe C_f au point A de coordonnées $(1\,;-1)$.

Cette tangente passe également par le point $B(0\,;-4)$.



1.Déterminer graphiquement $f'(1)$ puis donner, l'équation réduite de la tangente (T).

2.Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Que semble représenter le point A pour la courbe C_f ? Justifier brièvement.

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2x^2-2}{x^3}\ .$$

3. a) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) A l'aide des variations de la fonction f' , étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

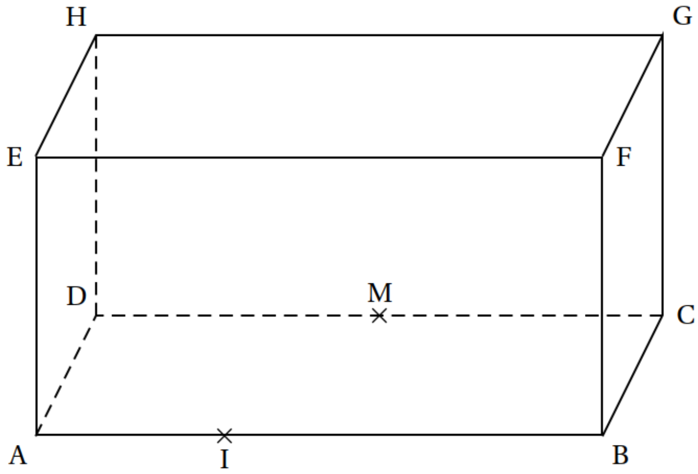
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Donner la valeur arrondie au centième de α et démontrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}}$$

Exercice 4 (5 points)

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et appelle M le milieu du segment $[CD]$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.
2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

   c) Le plan (P) dont une équation cartésienne est $5x + 15y + 7{,}5z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.

5. On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FM}$ ont pour coordonnées respectives :
   $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   a) Démontrer que $FH = \sqrt{10}$. On admet que $FM = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

   b) Déterminer, arrondi au centième, une mesure en degré de l'angle $\widehat{HFM}$.