Correction bac blanc n°1

<u>Exercice 1 (4 points)</u>

Partie A

1. Un groupe de 5 élèves dans une classe de 31 élèves est une combinaison de 5 éléments dans un ensemble de 31 éléments, il y en a donc

$\binom{31}{5} = \frac{31!}{5!26!} = \frac{31\times30\times29\times28\times27}{5\times4\times3\times2} = 31 \times 29 \times 7 \times 27 = 169\ 911$ *(0,5 point)*

La bonne réponse est d.

2. Un groupe de 3 élèves de SES est une combinaison de 3 éléments dans un ensemble de 20 éléments, il y en a $\binom{20}{3}$. Pour avoir un groupe de 5 élèves, il faut donc en choisir 2 parmi les 11 restants, il y a $\binom{11}{2}$ possibilités, au final, le nombre de groupes de 5 élèves comportant exactement 3 élèves de SES est $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2} = 1\ 140 \times 55 = 62\ 700$ *(0,75 point)*

La bonne réponse est a.

Partie B

1. On considère l'équation $\ln(x-7) + \ln(x - 2\ 401) = 5\ln(7)$.

$\ln(x-7) + \ln(x - 2\ 401) = 5\ln(7)$

$x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > 7$

$x - 2\ 401 > 0 \Leftrightarrow x > 2\ 401$

On résout l'équation dans $]2\ 401; +\infty[$, elle équivaut à :

$\ln((x-7)(x-2\ 401)) = \ln(7^5)$

$x^2 - 2\ 401x - 7x + 16\ 807 = 16\ 807$

$x(x - 2\ 408) = 0$

C'est une équation produit-nul.

$x = 0$ ou $x = 2\ 408$

Or $0 \notin]2\ 401; +\infty[$

Donc, $S = \{2\ 408\}$

L'affirmation 1 est fausse. *(1 point)*

2. $0{,}89^n \leq 0{,}000\ 001$

$\ln(0{,}89^n) \leq \ln(0{,}000\ 001)$

$n \ln(0{,}89) \leq \ln(0{,}000\ 001)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}000\ 001)}{\ln(0{,}89)}$ $(\ln(0{,}89) < 0)$

De plus, $\frac{\ln(0{,}000\ 001)}{\ln(0{,}89)} \approx 118{,}55$

Donc, $n \geq 119$

Les solutions de l'inéquation sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 119.

L'affirmation 2 est fausse. *(1 point)*

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0^+$ donc comme limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0^+$

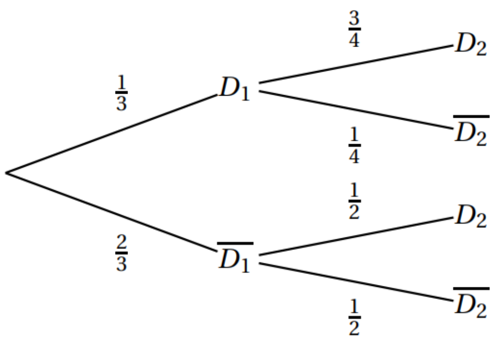
Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$

L'affirmation 3 est fausse. *(0,75 point)*

<u>Exercice 2 (6 points)</u>

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

1. On obtient l'arbre suivant : *(0,25 point)*



2. $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

La probabilité que le robot se déplace deux fois à droite est $\frac{1}{4}$. *(0,25 point)*

3.D'après la loi des probabilités totales, on a :

$P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap D_2)$

$p_2 = P(D_1)P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(D_2)$

$p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$

$p_2 = \frac{7}{12}$

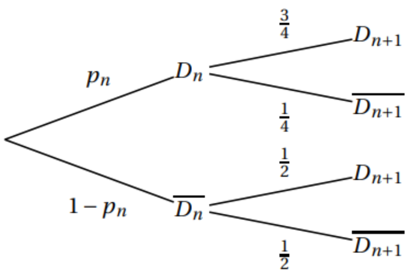
La probabilité que le robot se déplace vers la droite lors du deuxième mouvement est $\frac{7}{12}$. *(0,75 point)*

4. $P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{P(\overline{D_2} \cap D_1)}{P(\overline{D_2})} = \frac{P(D_1)P_{D_1}(\overline{D_2})}{1 - p_2} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{7}{12}} = \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

La probabilité que le robot se soit déplacé à droite lors du premier déplacement, sachant qu'il s'est déplacé à droite lors du deuxième déplacement est $0{,}2$. *(0,5 point)*

Partie B : étude de la suite (p_n)

1. Les déplacements de rang n et $n + 1$ du robot sont représentés sur l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales, on a :

$P(D_{n+1}) = P(D_n \cap D_{n+1}) + P(\overline{D_n} \cap D_{n+1})$

$p_{n+1} = P(D_n)P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n})P_{\overline{D_n}}(D_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$

$p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n$

$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$ *(0,75 point)*

2. a.

Soit $P(n)$ la proposition « $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$ ». (n entier naturel supérieur ou égal à 1)

- **1ère étape :initialisation**

  vérifions que P(1) est vraie. D'une part, $p_1 = \frac{1}{3}$
  D'autre part, $p_2 = \frac{7}{12}$. Donc, $p_1 \leq p_2 < \frac{2}{3}$
  P(1) est donc vraie.

- **2ème étape : hérédité**

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $p_k \leq p_{k+1} < \frac{2}{3}$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $p_{k+1} \leq p_{k+2} < \frac{2}{3}$.

$p_k \leq p_{k+1} < \frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}p_k \leq \frac{1}{4}p_{k+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}p_k + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}p_{k+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.
$p_{k+1} \leq p_{k+2} < \frac{2}{3}$ *P(k+1) est donc vraie*

Conclusion : la proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n *non nul*. *(1 point)*

b. D'après la question précédente, la suite p est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est donc convergente. *(0,25 point)*

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}u_n$ *(0,5 point)*
donc, la suite u est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
$p_n = u_n + \frac{2}{3} = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$
$-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0^+$
Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}^-$
Au bout d'un grand nombre de déplacements, la probabilité que le robot tourne à droite sera de plus en plus proche de $\frac{2}{3}$. *(0,75 point)*

4. On obtient le script suivant : *(0,5 point)*

```
def seuil():
    p=1/3
    n=1
    while p<0.66:
        p=0.25*p+0.5
        n=n+1
    return n
```

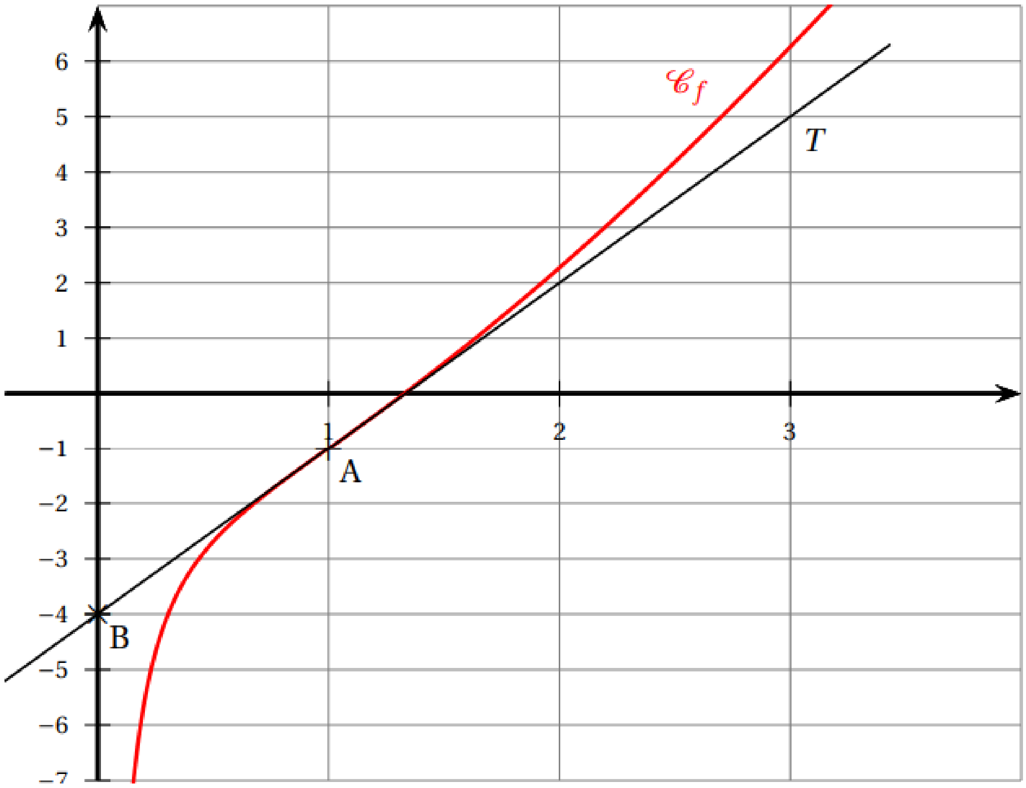
Partie C
Le déplacement du robot est une expérience de Bernoulli dont le succès est « le robot va vers la droite » de probabilité $p = \frac{3}{4}$. On répète 10 fois cette expérience de manière identique et indépendante, on obtient un schéma de Bernoulli. Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.
Pour que le robot revienne à son point de départ au bout de 10 déplacement, il doit avoir fait 5 déplacements vers la gauche et 5 déplacements vers la droite.
$P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(1 - \frac{3}{4}\right)^5 = 252 \times \frac{243}{1\,024} \times \frac{1}{1\,024} = \frac{15\,309}{262\,144} \approx 0{,}058$ *(0,75 point)*
Finalement, la probabilité que le robot revienne à son point de départ est de 0,058 à 10^{-3} prés.

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2xln(x) - \frac{1}{x} \quad .$$

Partie A : lectures graphiques



1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 c'est-à-dire de la tangente (T).

$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-(-4)}{1-0} = 3$. *(0,25 point)*

L'équation de (T) s'écrit :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 3(x-1) - 1$

$y = 3x - 4$ *(0,25 point)*

2.La fonction f semble concave sur $]0\,;1]$ et semble convexe sur $[1\,;+\infty[$. *(0,25 point)*

Il semble que le point A soit un point d'inflexion de la courbe C_f car en ce point la courbe traverse sa tangente (T). *(0,25 point)*

Partie B : étude analytique

1. $\lim\limits_{x\to 0+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Or ,par croissance comparée , $\lim\limits_{x\to 0+} xln(x) = 0.$

Comme limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to 0+} 2xln(x) - \frac{1}{x} = -\infty$ *(0,5 point)*

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$

Comme limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xln(x) = +\infty.$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Comme limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xln(x) - \frac{1}{x} = +\infty$ *(0,5 point)*

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
a) pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$*f = uv + w$
$*u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$
$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$w(x) = -\dfrac{1}{x} \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$*f' = u'v + uv' + w'$
$f'(x) = 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x^2}$ *(0,5 point)*
b) Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$*f' = u + v$
$*u(x) = 2\ln(x) + 2 \qquad u'(x) = \frac{2}{x}$
$v(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad v'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$
$*f'' = u' + v'$
$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2-2}{x^3}$. *(0,5 point)*

3. a)Comme $x > 0$, alors $x^3 > 0$ .Ainsi $f''(x)$ est du signe de $2x^2 - 2$.
$2x^2 - 2$ est un polynôme du second degré de racines évidentes -1 et 1.
$2x^2 - 2$ est du signe de $a = 2$ en dehors des racines. On en déduit donc le tableau ci-dessous :

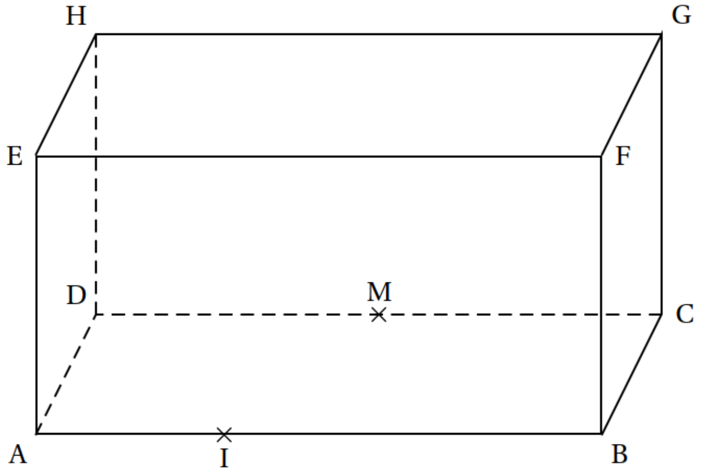
x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗	

La fonction f est donc concave sur $]0\,;1]$ et convexe sur $[1\,;+\infty[$. *(0,5 point)*
$f'(1) = 2\ln(1) + 2 + \frac{1}{1^2} = 3$
b) D'après la question précédente, la fonction f' admet un minimum en $x = 1$ de valeur $f'(1) = 3$
On en déduit donc , que tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) \geq 3$ et donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. *(0,5 point)*

4. a)
- f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- $0 \in]\lim\limits_{x\to 0+} f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. *(0,5 point)*

b) A l'aide de la technique de balayage , on obtient : $1 < \alpha < 2$ puis $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$ puis $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$ et enfin puis $1{,}327 < \alpha < 1{,}328$. Ainsi , $\alpha \approx 1{,}33$. *(0,25 point)*
$f(\alpha) = 0 \iff 2\alpha ln(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = 0 \iff \alpha ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha} \iff ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} \iff \alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}}$ *(0,25 point)*

Exercice 4 (5 points)



1. Les coordonnées des points F, H et M sont $F(3;0;1), H(0;1;1)$ et $M(\frac{3}{2};1;0)$. *(0,5 point)*

2. a) $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{HF}$

(le système $\begin{cases}\frac{3}{2} = 3k\\ -1 = -1k\\ 1 = 0\end{cases}$ n'admettant pas de solutions)

$\vec{n}.\overrightarrow{HF} = 2 \times 3 + 6 \times (-1) + 3 \times 0 = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{MF} = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF). Il est donc normal à ce plan. *(1 point)*

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

Par conséquent, une équation cartésienne du plan (HMF) est :$2x + 6y + 3z + d = 0$.

Or $F(3;0;1)$ appartient au plan (HMF).
On en déduit que $2 \times 3 + 6 \times 0 + 3 \times 1 + d = 0$ soit $9 + d = 0$ et donc $d = -9$.

Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc :$2x + 6y + 3z - 9 = 0$. *(0,75 point)*

c) Le plan (P) dont une équation cartésienne est $5x + 15y + 7{,}5z + 7 = 0$ est parallèle au plan (HMF) lorsque que leurs vecteurs normaux respectifs sont colinéaires.

En l'occurrence un vecteur normal de (P) est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\7{,}5\end{pmatrix}$.

Il est clair que $\overrightarrow{n'} = 2{,}5\vec{n}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ sont donc colinéaires.

On en déduit donc que le plan (P) est parallèle au plan (HMF) . *(0,5 point)*

3. La droite (DG) passe par le point $D(0;1;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=0+3t\\y=1+0t\\z=0+1t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ soit : $\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\end{cases}$ *(0,5 point)*

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   On résout le système :

$$\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\2x+6y+3z-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\2(3t)+6+3t-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\9t=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\times\frac{1}{3}=1\\y=1\\z=t=\frac{1}{3}\\t=\frac{1}{3}\end{cases}$$

   On en déduit que $N(1;1;\frac{1}{3})$. *(0,75 point)*

5. a) $\text{FH}=\sqrt{(-3)^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$ *(0,25 point)*

   b) On calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{FH}}$ et $\overrightarrow{\text{FM}}$

   $\overrightarrow{\text{FH}}.\overrightarrow{\text{FM}}=(-3)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1\times1+0\times(-1)=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$

On en déduit que $FH\times FM\times\cos\left(\widehat{FHM}\right)=\frac{11}{2}$.
Par conséquent, $\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\cos\left(\widehat{FHM}\right)=\frac{11}{2}$.
On en déduit que $\cos\left(\widehat{FHM}\right)=\frac{11}{\sqrt{170}}=\frac{11\sqrt{170}}{170}$.
$\widehat{FHM}=cos^{-1}\left(\frac{11\sqrt{170}}{170}\right)\approx 32{,}47°$ *(0,75 point)*