**CHAPITRE 1 : COMPLEMENTS DE PREMIERE**

**I-Compléments sur les suites**

**1.Suite géométrique**

**Définition :**

Une suite (*un*) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre *q* tel que pour tout entier *n*, on a :

. Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite.

**Propriété :**

Soit (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

Soit (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u1*.

Pour tout entier naturel *n non nul*, on a :

**2.Suite arithmético-géométrique**

**Définition :**

Une suite (*un*) est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres et tels que pour tout entier *n*, on a :

**Remarque :** si , la suite est géométrique de raison

Si , la suite est géométrique de raison

Exemple : Soit (*un*) la suite définie pour tout entier *n*, par : et .

Calculer le 4ème terme de cette suite. Vérifier à l’aide de la calculatrice.

.

.

**Transition :** est-il possible d’obtenir la formule explicite d’une suite arithmético-géométrique ?

**Point méthode :** il faut utiliser une suite intermédiaire (donnée) qui est géométrique

**Exemple : formule explicite d’une suite arithmético-géométrique**

vidéo : mathssa.fr/arithmetico

Soit la suite est définie par our tout , .

Soit la suite définie par Démontrer que la suite est géométrique puis déterminer la formule explicite de la suite

**Correction :**

Pour tout entier naturel ,

.

La suite est donc géométrique de 1er terme , de raison q=

On en déduit que pour tout entier ,

Ainsi

**3.Suites majorées – minorées - bornées**

M

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Fig1* | m  *Fig2* | m  M  *Fig3* |

**Définitions :**

- La suite est **majorée** s'il existe un réel tel que pour tout entier naturel , on a : . Fig1

- La suite est **minorée** s'il existe un réel tel que pour tout entiernaturel, on a :. Fig2

- La suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Fig3

**Remarque :** les réels m et M sont des **nombres indépendants** de l’entier .

M est appelé **majorant**  , m  **minorant**

**Exemples :**

- Les suites de terme général ou sont bornées car minorées par et majorées par .

- La suite de terme général est minorée par 0. Mais elle n’est pas majorée.

**4.Raisonnement par récurrence**

Le principe

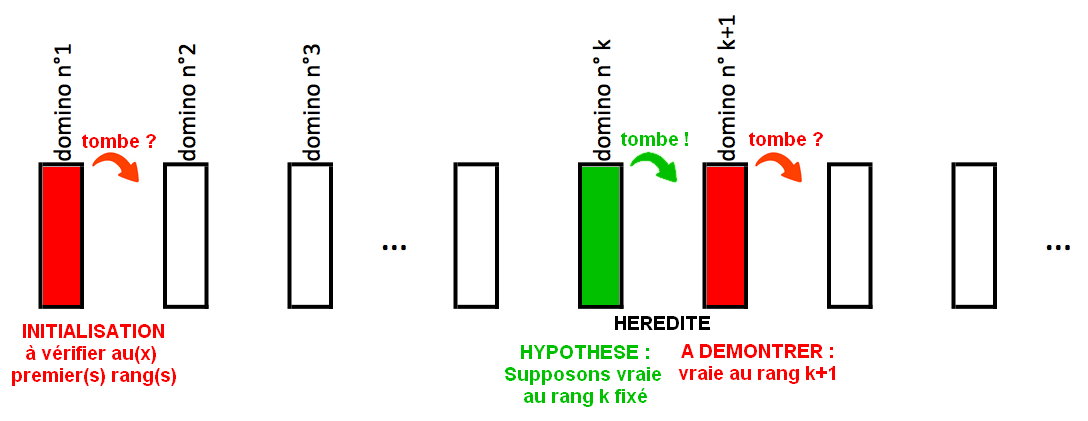


*C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).*



On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.

Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

****

Si on suppose qu'un domino tombe alors le domino suivant tombe également. C’est ce qu’on appelle le principe d’hérédité.

**Définition :** On dit qu’une propriété est **héréditaire** à partir d’un certain rang :

Si la propriété est vraie pour un entier , alors elle est vraie pour l’entier.

Soit P() une proposition qui dépend d’un entier naturel .

Pour démontrer que pour tout entier naturel  ** , P(*n*) est vraie, il suffit de :

**1ère étape :** vérifier que *P( )* est vraie **(initialisation)**

**2ème étape :** démontrer que pour un entier  ** quelconque

si *P(k)* est vraie alors *P(k+1)* est vraie **(hérédité)**

*( on aura très souvent n0 = 0 ou 1 )*

**Remarque :** une proposition mathématique est un énoncé mathématique qui est vrai ou faux.

On tente d’utiliser une démonstration par récurrence, lorsqu'une démonstration classique n'est pas possible ou est trop difficile…

**Exemple:** soit définie par our tout ,

*Démontrons* par récurrence que pour tout , .

**1ère étape :initialisation**

vérifions que *P(*  est vraie

et

*P(*  est donc vraie

**2ème étape : hérédité**

Hypothèse : on suppose que pour un entier  quelconque *P(k)* est vraie c’est-à-dire

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c’est-à-dire

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel

**5.Inégalité de Bernoulli**

vidéo : mathssa.fr/bernoulli

**Propriété : Inégalité de Bernoulli**

Soit un nombre réel positif.

Pour tout entier naturel , on a : .

**Preuve :**

**1ère étape :initialisation**

vérifions que *P(*  est vraie

et

*P(*  est donc vraie

**2ème étape : hérédité**

Hypothèse : on suppose que pour un entier  quelconque *P(k)* est vraie c’est-à-dire

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c’est-à-dire

(on multiplie chaque membre par )

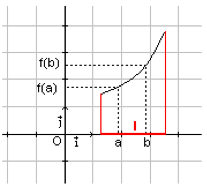
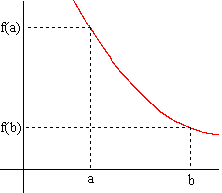
or ainsi

On en déduit que :

**Conclusion :** la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel

**II- Compléments sur la dérivation**

**1.Monotonie et stricte monotonie**



|  |
| --- |
| Définitions :  Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.   * *f* est croissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I :si *a* < *b* alors . * *f* est décroissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I :si *a* < *b* alors . * *f* est constante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I : . * *f* est monotone sur I signifie que *f* est soit croissante sur I, soit décroissante sur I. |

Remarques :

* On dit qu’une fonction croissante conserve l’ordre.
* On dit qu’une fonction décroissante renverse l’ordre.
* Pour une fonction strictement croissante : si *a* < *b* alors .
* Pour une fonction strictement décroissante : si *a* < *b* alors .
* Une fonction strictement croissante « monte » en permanence (pas de palier)
* Une fonction strictement décroissante « descend » en permanence (pas de palier)

**Théorème (monotonie):**

Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I

Si pour tout réel *x* de I, alorsest **croissante** sur I.

Si pour tout réel *x* de I alorsest **décroissante** sur I.

Si pour tout réel *x* de I, alors est **constante** sur I.

**Remarque :**

Si alorsest **strictement** **croissante** sur I.

Si alorsest **strictement** **décroissante** sur I

Si sauf en quelques valeurs isolées où elle s’annule alorsest **strictement** **croissante** sur I.

Si sauf en quelques valeurs isolées où elle s’annule alorsest **strictement** **décroissante** sur I

**Pour s’entrainer :** mathssa.fr/variationsdeg3

**2.Dérivée d’une fonction composée**

**Définition :**

On appelle **fonction composée** des fonctions  par  la fonction notée  ( se lit « v rond u »)définie par :

On notera sous forme schématique :

|  |
| --- |
|  |

**Exemple 1:** on pose

Déterminer et .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Exemple 2:** **Vidéo** mathssa.fr/fctcomposee

On considère la fonction définie par .

Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction .

**Correction**

On peut décomposer la fonction en deux fonctions et telles que :

Les fonctions et sont définies par : et

On dit que la fonction est la composée de par et on note :

|  |
| --- |
|  |

**Propriété (dérivée d’une fonction composée)**

Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I et une fonction **dérivable** sur un intervalle J tel que pour tout .

La fonction est dérivable sur I et pour tout

On retiendra :

**Propriété admise**

**Propriété :**

*u* est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.

Alors la fonction *f* définie sur I par est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I , on a : . Soit la formule

Démonstration :

- avec

Donc  , car

Soit

**Application :** soit la fonction définie sur par Calculer

est **dérivable** sur car de la forme où dérivable

Pour tout réel



**Formulaire :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction *f* | Dérivée *f* ' | condition |
| avec |  | Si , u |
|  |  | Pour tout |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Démonstrations :

- avec

Donc , car

Soit

- avec

Donc , car

Soit

**3.Dérivée seconde**

**Définition :** Soit une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est dérivable sur .

On appelle **fonction dérivée seconde** de sur la dérivée de que l’on note :

**Exemple :** Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions et g définies par :

,

**Correction**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**III- Les équations différentielles**

**Vidéo :mathssa.fr/equadiff**

**1.Définition d’une équation différentielle**

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l’inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction et éventuellement la fonction elle-même.

Exemples :a) L’équation est une équation différentielle.

L’inconnue est la fonction .

En considérant que est la fonction inconnue qui dépend de , l’équation différentielle peut se noter :

b) L’équation est également une équation différentielle.

L’inconnue est la fonction dont la dérivée est égale à .

**2.Équation différentielle du type**

**Définition :** Soit une fonction définie sur un intervalle .

La fonction est une solution de l’équation différentielle si et seulement si

.

Exemple :on considère l’équation différentielle .

Démontrer que la fonction g définie sur par est solution particulière de l’équation différentielle (E).

est **dérivable** sur en tant que fonction polynôme .

Pour tout réel ,

est donc solution particulière de l’équation différentielle (E).

**3. Équations différentielles du type**

**Rappel :**

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*,

et .

C’est donc l’unique solution de l’équation différentielle

Propriété :

Les solutions de l’équation différentielle , , sont les fonctions de la forme , où est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme : **Vidéo** mathssa.fr/equadif8

• Soit la fonction définie sur par , où est un réel.  
Alors, *.*

Donc .

est donc solution de l’équation différentielle .

• Réciproquement, soit une solution de l’équation différentielle .

Et soit la fonction définie sur par .  
 est dérivable sur et on a : .

Comme est solution de l’équation différentielle , on a : .  
Ainsi :

La fonction est donc égale à une constante réelle , soit :.

Et donc : .

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type **Vidéo** mathssa.fr/equadif9

**Correction**

Les solutions de l’équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : , .

Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif

**Propriété : (linéarité)**

Si et sont deux solutions de l’équation différentielle , , alors  et sont également solutions de l’équation différentielle.

Démonstrations :

-

-

**4.Équations différentielles du type**

**Propriété :** La fonction est solution de l’équation différentielle

(). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : . Alors

Or,

Donc :

est donc solution de l’équation différentielle

**Propriété :**

Les solutions de l’équation différentielle (sont les fonctions

de la forme , où .

Solution de l’équation Solution particulière

constante de l’équation

Remarque : L’équation est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type

**Vidéos :** mathssa.fr/equadif4 et tmathssa.fr/equadif5

On considère l’équation différentielle (E) : .

a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l’équation.

b) Déterminer l’unique solution telle que .

**Correction**

a)

● Une solution particulière constante est la fonction : car .

● Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme : , .

● Les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme :,

est solution de l’équation différentielle, donc de la forme : ,

Donc

Or,

Et donc : Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif2

**4.Équations différentielles du type où est une fonction**

**Propriété :**

est une fonction définie sur un intervalle .

Les solutions de l’équation différentielle (sont les fonctions de la forme :

, où .

Solution de l’équation Solution particulière

de l’équation

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type

**Vidéo** mathssa.fr/equadif6

On considère l’équation différentielle .

a) Démontrer que la fonction définie sur par est solution particulière de l’équation différentielle.

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l’équation différentielle.

**Correction**

a)Pour tout reel ,

Donc :

On a donc :

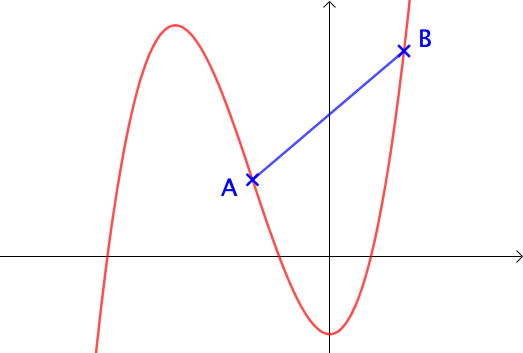
La fonction définie sur par est donc une solution particulière de l’équation différentielle .

b) Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme , .

On en déduit que les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme :

, .

Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif3

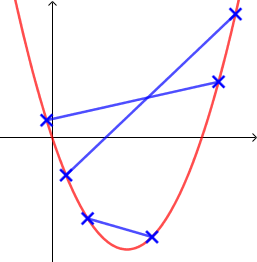
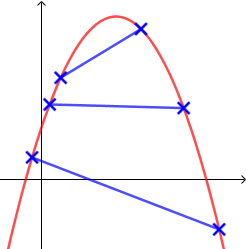
**IV-Convexité d’une fonction**

Vidéo : mathssa.fr/convexite

**1.Définitions avec les cordes**

**Définition** :

Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.



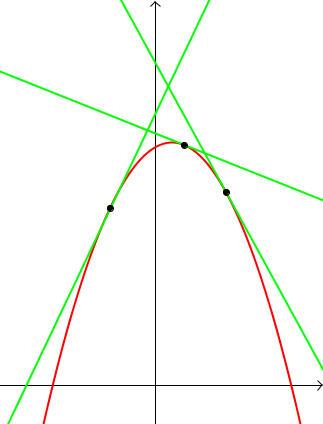
Fonction convexe Fonction concave

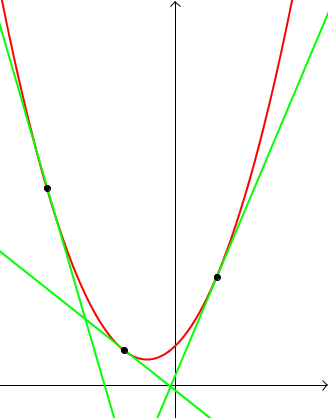
**Définitions :**

Soit une fonction définie sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

**2.Définitions avec les tangentes**



Fonction convexe Fonction concave

**Définitions :** Soit une fonction dérivable sur un intervalle .

- La fonction est **convexe** sur , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction est **concave** sur , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

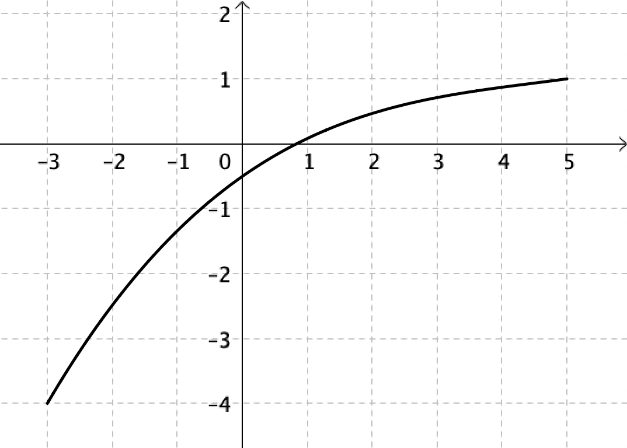
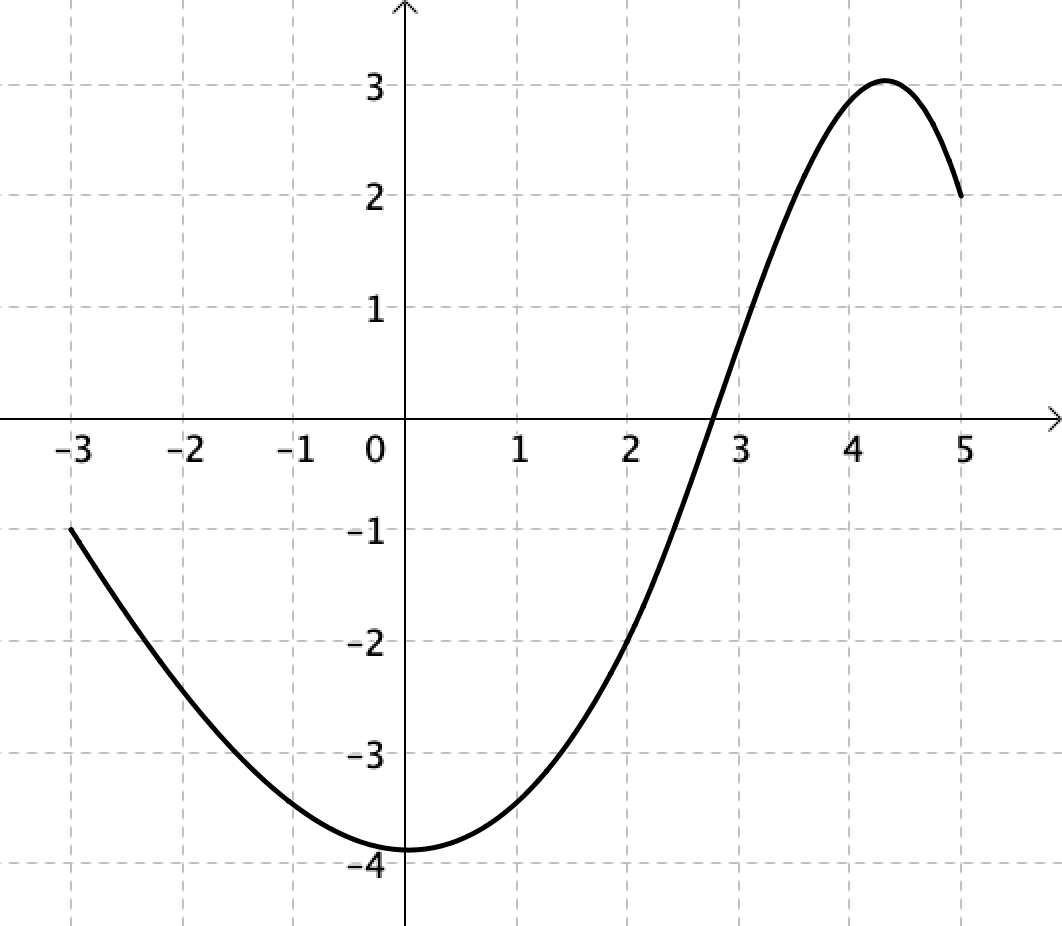
Remarque : les fonctions affines sont à la fois convexe et concave sur

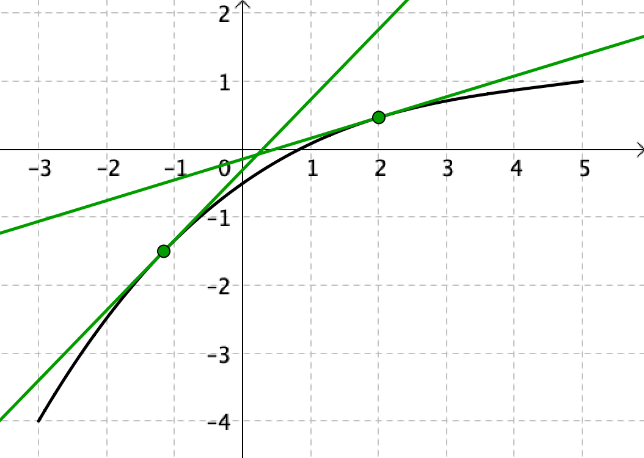
Exemple : Reconnaître graphiquement la convexité

**Vidéo** mathssa.fr/convexite2

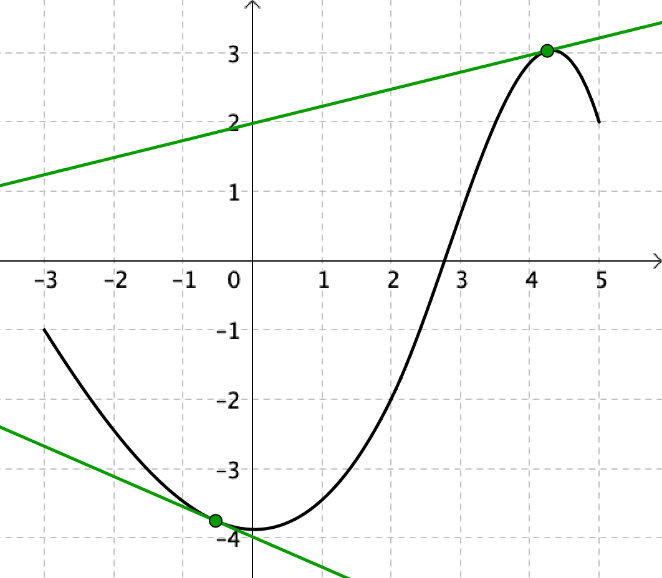
Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l’intervalle .

a) b)

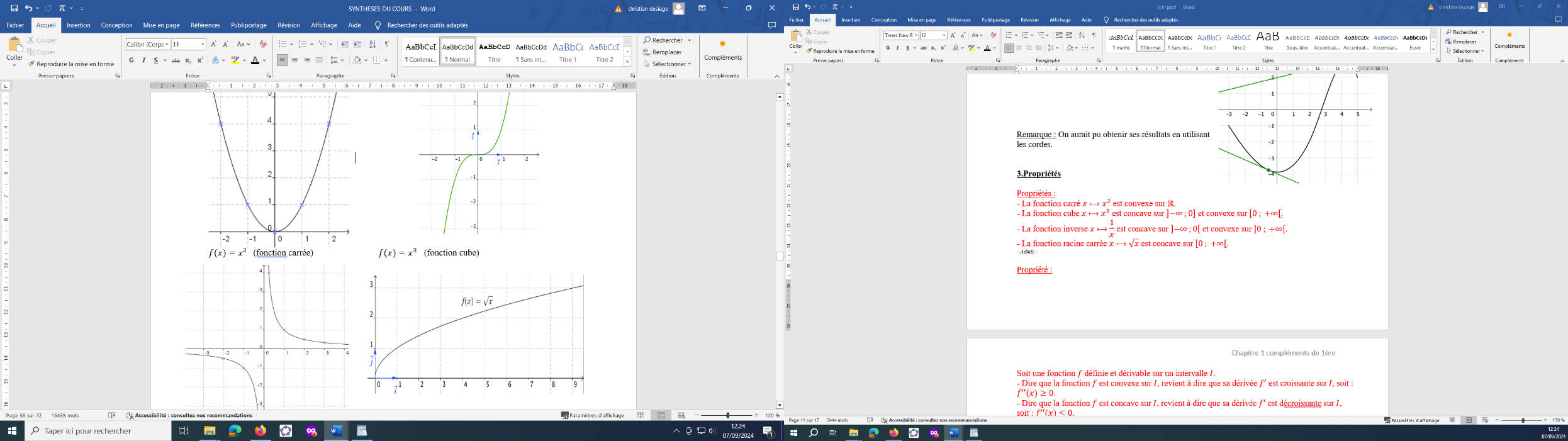
**Correction**

a) La fonction est concave sur [-3 ;5] car sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

b) La fonction est convexe sur [-3 ;2] puis concave que [2 ;5]

Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

**3.Propriétés**



**Propriétés : fonctions vues en seconde**

- La fonction carré est convexe sur .

- La fonction cube est concave sur et convexe sur .

- La fonction inverse est concave sur et convexe sur .

- La fonction racine carrée est concave sur .

*- Admis -*

**Propriété :**

Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle .

- la fonction est convexe sur si et seulement si sa dérivée est croissante sur ,soit .

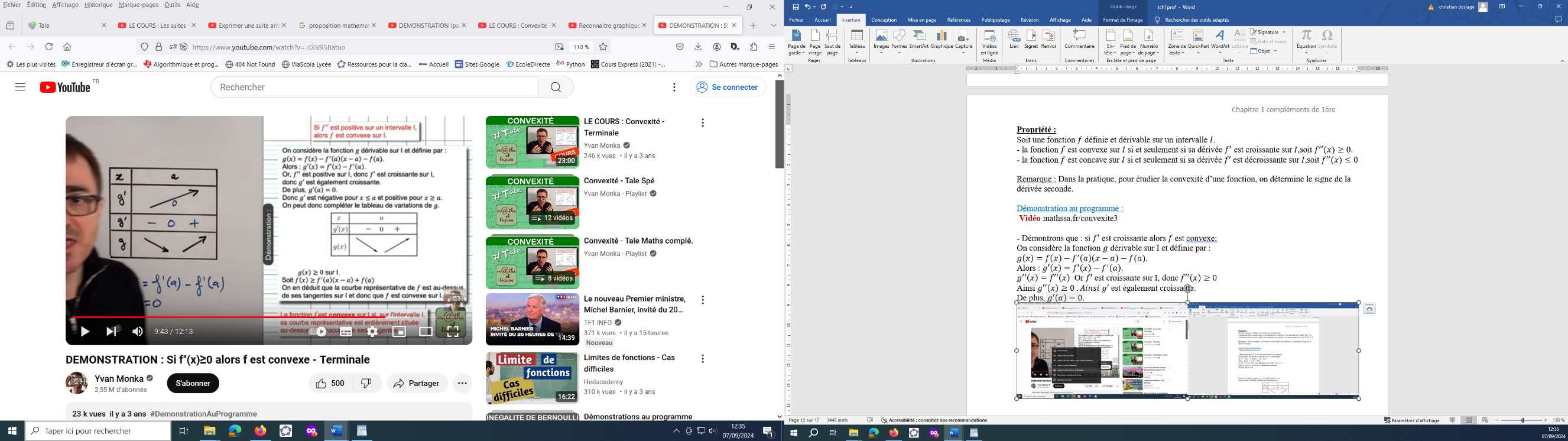
- la fonction est concave sur si et seulement si sa dérivée est décroissante sur ,soit

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d’une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Démonstration au programme :

**Vidéo** mathssa.fr/convexite3

- Démontrons que : si est croissante alors est convexe:

On considère la fonction dérivable sur I et définie par :

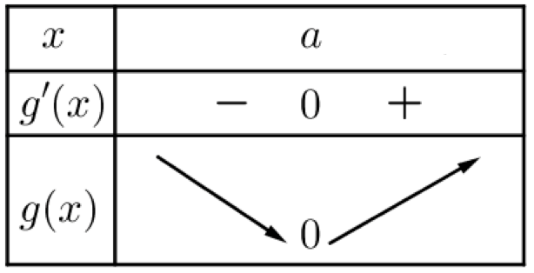
.

Alors : .

Or est croissante sur I, donc

Ainsi est également croissante.

De plus, .

Donc est négative pour et positive pour .

On peut donc compléter le tableau de variations de

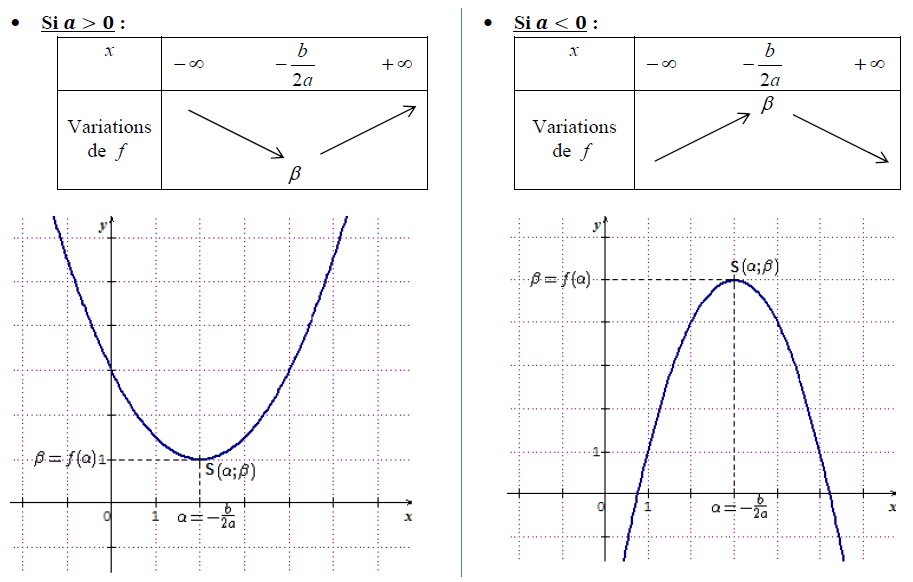
En effet :

Donc sur I.

Soit

On en déduit que la courbe représentative de est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que : si est décroissante alors est concave.

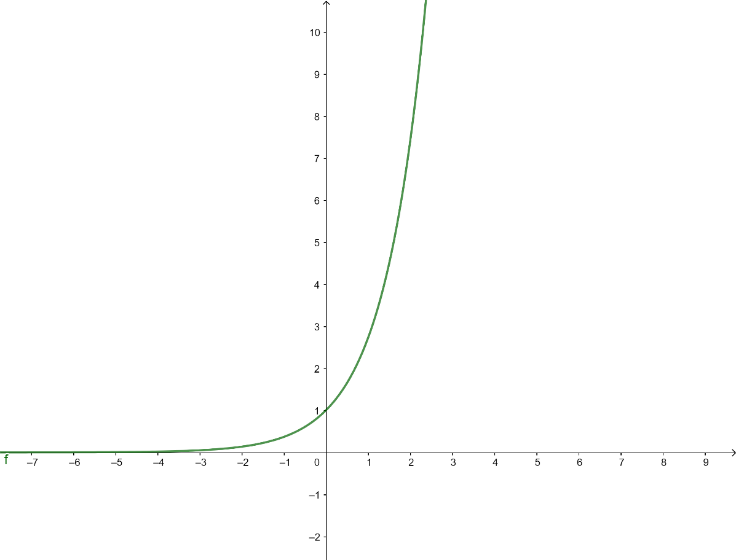


**Propriété :** Soit le **polynôme du second degré** défini par

Si , est convexe sur

Si , est concave sur

Eléments de preuve :



**Propriété**

La fonction exponentielle est convexe sur .

Preuve :

Or Ainsi et est donc convexe sur .

Exemple : Étudier la convexité d’une fonction

**Vidéo** mathssa.fr/convexite4

Soit la fonction définie sur par .

Étudier la convexité de la fonction .

**Correction**

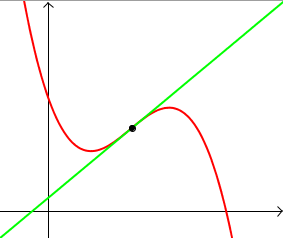
est dérivable sur en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour .

Pour tout réel ,

.

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 9 +∞ |
|  |  |
|  | - 0 + |
| Convexité ou concavité | concave convexe |

Donc est concave sur et est convexe sur .

**4.Point d’inflexion**

**Définition :** Soit une fonction dérivable sur

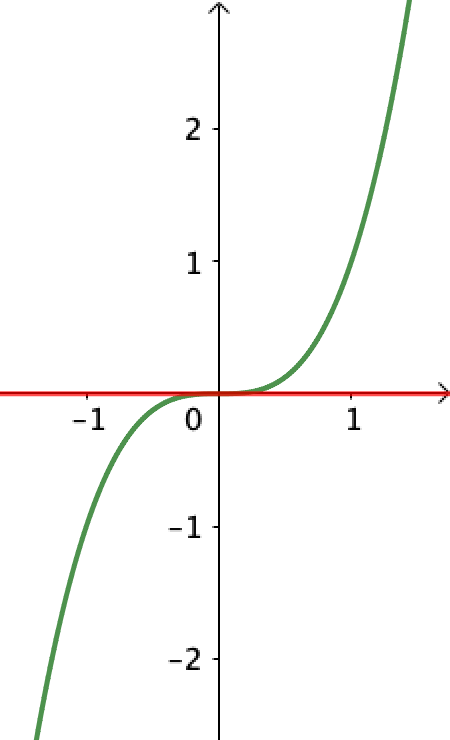
un intervalle .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente.

**Propriété :**

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple :

On considère la fonction cube .

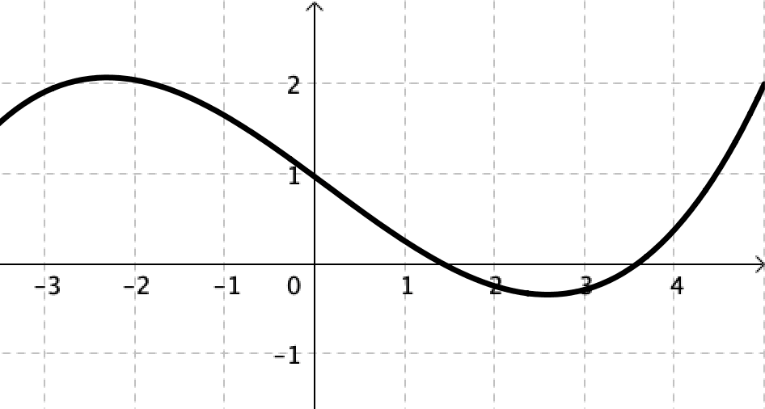
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour , la courbe est au-dessus de sa tangente.

L’origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

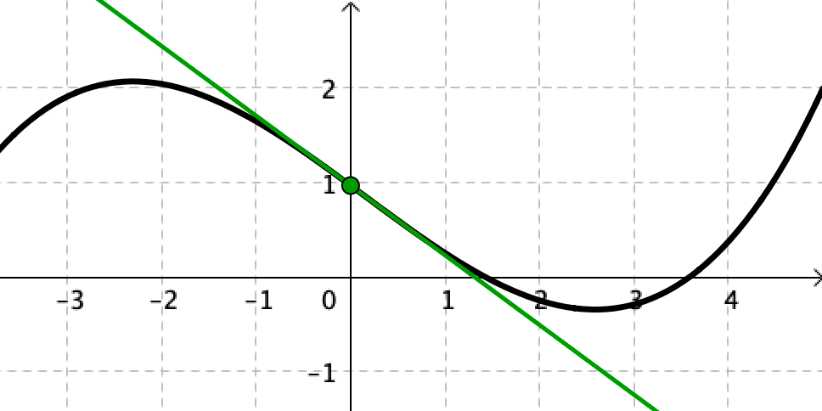
La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.



Méthode : Reconnaître graphiquement un point d’inflexion

**Vidéo** mathssa.fr/inflexion

Déterminer graphiquement le point d’inflexion de la fonction représentée ci-dessous.



**Correction**

La fonction est d’abord concave sur ]-∞ ;0] puis convexe sur [0 ;+∞[. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d’inflexion de la courbe.

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

**Vidéo** mathssa.fr/inflexion2

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de milliers de clés produites s'exprime par :

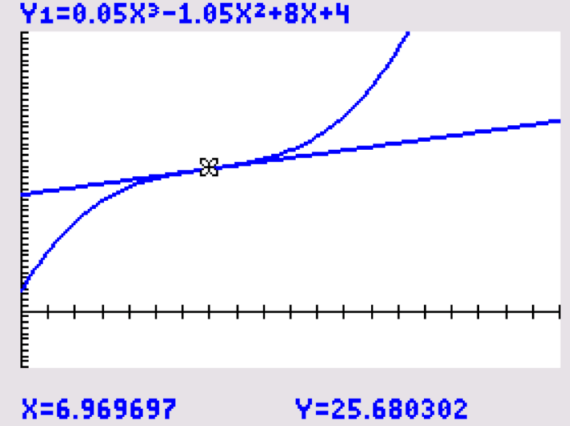
, définie sur l’intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction .

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

**Correction**

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour .

2) est dérivable sur en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour .

Pour tout réel ,

De [0 ;10]

Or, pour .On peut ainsi résumer les variations de et la convexité de dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 7 10 |
|  | O + |
|  |  |
| Convexité de | concave convexe |

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

**Vidéo** :mathssa.fr/inflexion3

Soit la fonction définie sur par .

a) Étudier la convexité de la fonction .

b) Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de la fonction en –1.

c) En déduire que pour tout réel négatif, on a : .

**Correction**

a) est dérivable sur en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour .

Pour tout réel , . qui s’annule pour .

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ +∞ |
|  |  |
|  | - 0 + |
| Convexité ou concavité | concave convexe |

Donc est concave sur et est convexe sur .

b) L’équation de la tangente à la courbe de la fonction en –1 est de la forme :

On a :

Donc, l’équation de la tangente en –1 est : soit :

c) est concave sur donc sur cet intervalle, la courbe représentative de est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de est située en dessous de la tangente en –1.

On a ainsi, sur

Soit sur et donc en particulier pour tout négatif.

