CHAPITRE 1 : COMPLEMENTS DE PREMIERE

I-Compléments sur les suites

1.Suite géométrique

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :
$u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Propriété :
Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$
Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1.
Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

2.Suite arithmético-géométrique

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = au_n + b}$.

Remarque : si $a = 1$, la suite est géométrique de raison b
Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison a.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n, par : $u_{n+1} = 3u_n - 1$ et $u_0 = 5$.
Calculer le 4ème terme de cette suite. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

$u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$.
$u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 41$.
$u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times 41 - 1 = 122$.

Transition : est-il possible d'obtenir la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique ?

Point méthode : il faut utiliser une suite intermédiaire (donnée) qui est géométrique

Exemple : formule explicite d'une suite arithmético-géométrique
vidéo : mathssa.fr/arithmetico
Soit la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ *et* pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
Soit la suite(v_n) définie par $v_n = u_n - 3$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis déterminer la formule explicite de la suite (u_n)

Correction :
Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de 1er terme $v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$, de raison $q=\frac{1}{3}$.
On en déduit que pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Ainsi $u_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et* $u_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.Suites majorées – minorées - bornées

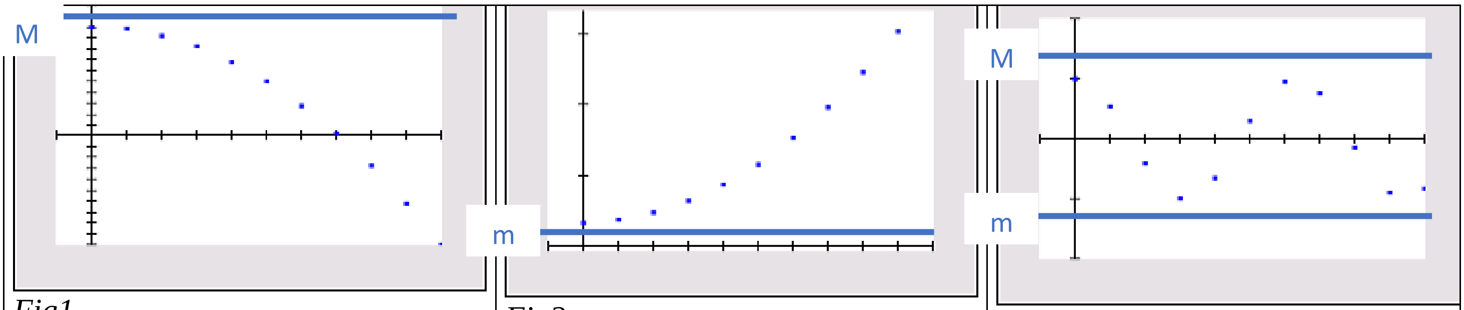


Fig1 *Fig2* *Fig3*

Définitions :

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$. Fig1
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, on a :$u_n \geq m$. Fig2
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Fig3

Remarque : les réels m et M sont des **nombres indépendants** de l'entier n.
M est appelé **majorant** , m **minorant**

Exemples :

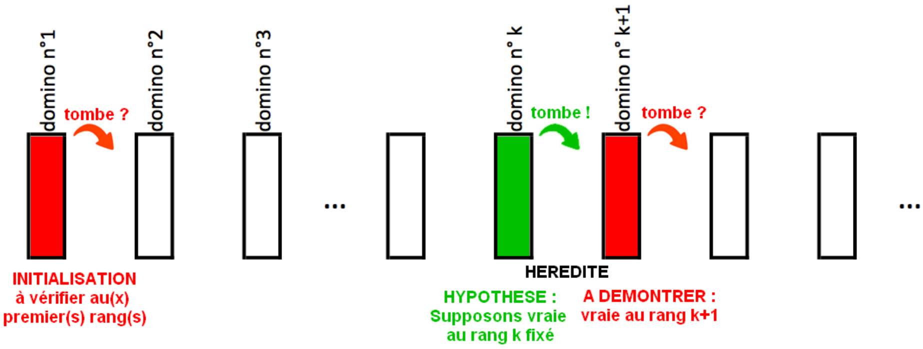
- Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0. Mais elle n'est pas majorée.

4.Raisonnement par récurrence

Le principe

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.
Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Si on suppose qu'un domino $n°$ (k) tombe alors le domino suivant $n°$ $(k+1)$ tombe également. C'est ce qu'on appelle le principe d'hérédité.

Définition : On dit qu'une propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang :
Si la propriété est vraie pour un entier k, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Soit P(n) une proposition qui dépend d'un entier naturel n.
Pour démontrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, P(n) est vraie, il suffit de :

1ère étape : vérifier que $P(n_0)$ est vraie **(initialisation)**

2ème étape : démontrer que pour un entier $k \geq n_0$ quelconque
si *P(k)* est vraie alors *P(k+1)* est vraie **(hérédité)**

(on aura très souvent $n_0 = 0$ ou 1)

Remarque : une proposition mathématique est un énoncé mathématique qui est vrai ou faux.
On tente d'utiliser une démonstration par récurrence, lorsqu'une démonstration classique n'est pas possible ou est trop difficile…

Exemple: soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ *et pour tout* n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$
Démontrons par récurrence que pour tout n, $u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1ère étape :initialisation
vérifions que $P(0)$ est vraie

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3 - 1 = 2$$

$u_0 = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0$ $P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité
Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^k$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{3}u_k + 2 \\ &= \frac{1}{3}\left(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) + 2 \\ &= \frac{3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k + 2 \\ &= 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

5.Inégalité de Bernoulli

vidéo : mathssa.fr/bernoulli

Propriété : Inégalité de Bernoulli
Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Preuve :
1ère étape :initialisation
vérifions que $P(0)$ est vraie
$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$
$P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité
Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $(1 + a)^k \geq 1 + ka$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

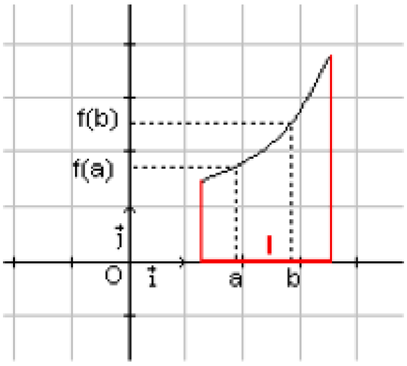
$(1+a)^k \geq 1+ka$
$(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$ (on multiplie chaque membre par $1+a>0$)
$(1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2$
$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2$ or $ka^2 \geq 0$ ainsi $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$

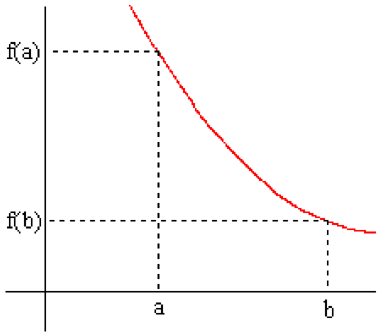
On en déduit que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

II- Compléments sur la dérivation

1.Monotonie et stricte monotonie





Définitions :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
- f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.
- f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarques :
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Pour une fonction strictement croissante : si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- Pour une fonction strictement décroissante : si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
- Une fonction strictement croissante « monte » en permanence (pas de palier)
- Une fonction strictement décroissante « descend » en permanence (pas de palier)

Théorème (monotonie):
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I.
Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Remarque :
Si $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.
Si $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I
Si $f'(x) > 0$ sauf en quelques valeurs isolées où elle s'annule alors f est **strictement croissante** sur I.
Si $f'(x) < 0$ sauf en quelques valeurs isolées où elle s'annule alors f est **strictement décroissante** sur I

Pour s'entrainer : mathssa.fr/variationsdeg3

2.Dérivée d'une fonction composée

Définition :

On appelle **fonction composée** des fonctions u par v la fonction notée $v \circ u$ (se lit « v rond u »)définie par : $v \circ u\ (x) = v(u(x))$

On notera sous forme schématique :

$$v \circ u : \quad x \xrightarrow{u} u(x)$$
$$X \xrightarrow{v} v(X)$$

Exemple 1: on pose $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.

Déterminer $v \circ u\ (x)$ et $u \circ v\ (x)$.

$v \circ u : \quad x \xrightarrow{u} x^2 + 1$ $X \xrightarrow{v} \frac{1}{X}$ $v \circ u\ (x) = \frac{1}{x^2 + 1}$	$u \circ v : \quad x \xrightarrow{v} \frac{1}{x}$ $X \xrightarrow{u} X^2 + 1$ $u \circ v\ (x) = \frac{1}{x^2} + 1$

Exemple 2: **Vidéo** mathssa.fr/fctcomposee

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x - 3}$.

Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f.

Correction

On peut décomposer la fonction f en deux fonctions u et v telles que :

$$v \circ u : \quad x \xrightarrow{u} x - 3$$
$$X \xrightarrow{v} \sqrt{X}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u\ (x) = v(u(x)) = \sqrt{x - 3}$$

$$v \circ u : \quad x \xrightarrow{u} u(x)$$
$$X \xrightarrow{v} v(X)$$

Propriété (dérivée d'une fonction composée)

Soit u une fonction **dérivable** sur un intervalle I et u une fonction **dérivable** sur un intervalle J tel que pour tout $x \in I, u(x) \in J$.

La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

On retiendra : $(v \circ u)' = v' \circ u \times u'$

Propriété admise

Propriété :
u est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a :
$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Soit la formule $(e^u)' = u'e^u$

Démonstration :
- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = e^x$
Donc $(e^{u(x)})' = v'(u(x)) \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$, car $v'(x) = e^x$
Soit $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

Application : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3-3x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme e^u où u est dérivable $\mathbb{R}$
Pour tout réel x,
- $f = e^u$
- $u(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $u'(x) = 3x^2 - 6x$
- $f' = u'e^u$ $f'(x) = (3x^2 - 6x)e^{x^3-3x^2+1}$.

Formulaire :

Fonction f	Dérivée f'	condition
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $n \leq -1$, $u(x) \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	Pour tout $x, u(x) > 0$
e^u	$u'e^u$	
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	
$sin(u)$	$u'cos(u)$	

Démonstrations :
- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$
Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Soit $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $(u(x))^n = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$
Donc $((u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$
Soit $((u(x))^n)' = nu'(x)(u(x))^{n-1}$

3.Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' que l'on note : f''.

Exemple : Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions f et g définies par :
$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$, $g(x) = e^{-2x}$

Correction

$f'(x) = 9x^2 - 10x$ $f''(x) = 18x - 10$	$g'(x) = -2e^{-2x}$ $g''(x) = -2 \times -2e^{-2x} = 4e^{-2x}$

III- Les équations différentielles

Vidéo :mathssa.fr/equadiff

1.Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction et éventuellement la fonction elle-même.

Exemples :a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction f.
En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x, l'équation différentielle peut se noter : $y' = 5$
b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2 - 3$.

2.Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
La fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Exemple :on considère l'équation différentielle $(E) : y' = 3x^2 - x - \frac{1}{4}$.
Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 8$ est solution particulière de l'équation différentielle (E).

g est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme .
Pour tout réel x , $g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{4} \times 1 + 0 = 3x^2 - x - \frac{1}{4}$
$g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 8$ est donc solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Équations différentielles du type $y' = ay$

Rappel :
La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,
$f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
C'est donc l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme : **Vidéo** mathssa.fr/equadif8

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$
$= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :$e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = C \times \dfrac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$ **Vidéo** mathssa.fr/equadif9

Correction

$3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \qquad 3y' = -5y \Leftrightarrow \qquad y' = -\dfrac{5}{3}y$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif

Propriété : (linéarité)
Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :
- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

4.Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :
On pose : $g(x) = -\dfrac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.
Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.
Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.
g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions
de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation
$y' = ay$

Solution particulière
constante de l'équation
$y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$
Vidéos : mathssa.fr/equadif4 et tmathssa.fr/equadif5
On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 3$.
a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction
a) $2y' - y = 3 \Leftrightarrow \quad 2y' = y + 3 \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \qquad a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$ car $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

$b)$ f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$
Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = C - 3$
Or, $f(0) = -1 \Leftrightarrow C - 3 = -1 \Leftrightarrow \quad C = 3 - 1 = 2$
Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$. Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif2

4.Équations différentielles du type $y' = ay + f$ où f est une fonction

Propriété :
f est une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière de l'équation $y' = ay + f$

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$
Vidéo mathssa.fr/equadif6
On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction
a)Pour tout reel x, $p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

Donc : $p'(x) - 2p(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$

$= x^2$

On a donc : $p'(x) - 2p(x) = x^2$
La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

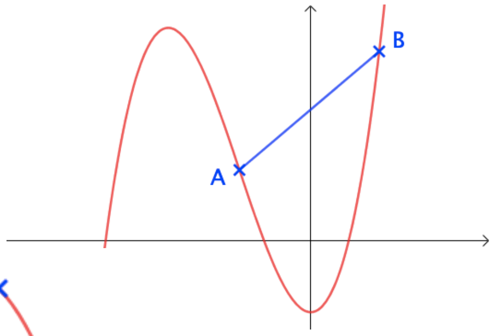
On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :
$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif3

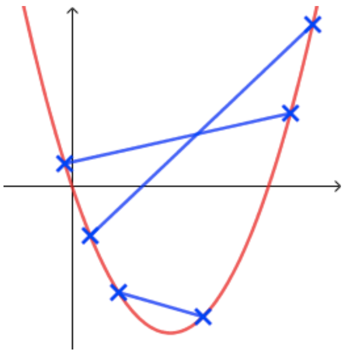
IV-Convexité d'une fonction

Vidéo : mathssa.fr/convexite

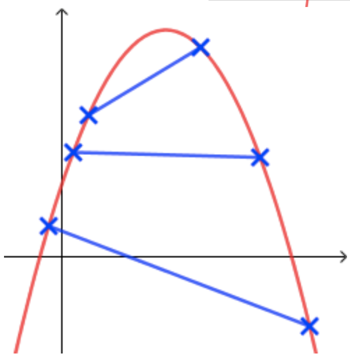
1.Définitions avec les cordes

Définition :
Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.





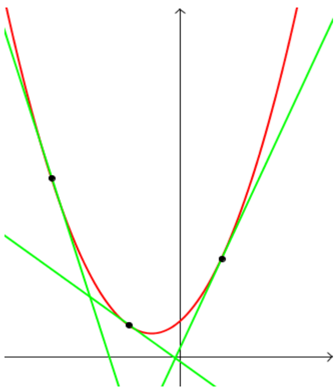
Fonction convexe



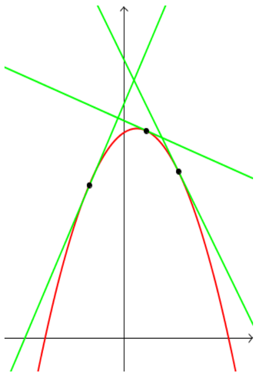
Fonction concave

Définitions :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction f est **concave** sur I, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

2.Définitions avec les tangentes



Fonction convexe



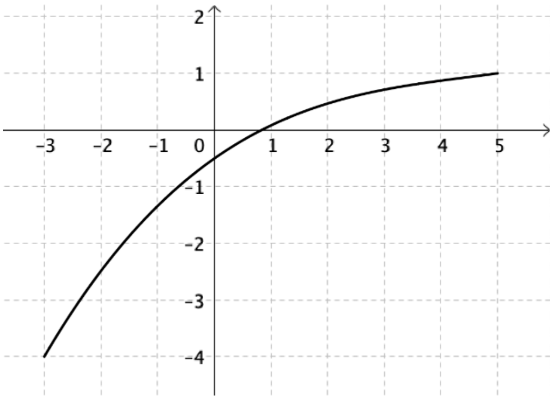
Fonction concave

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I, si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I, si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

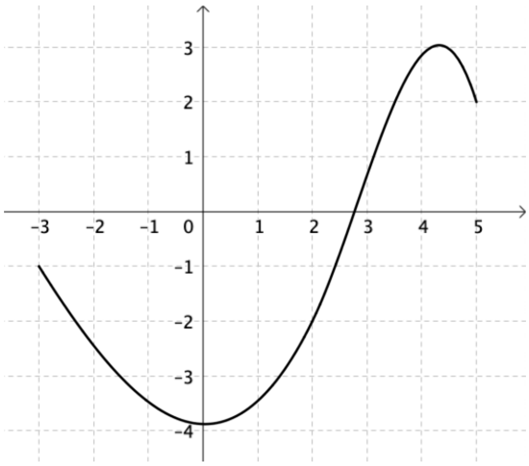
Remarque : les fonctions affines sont à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$

Exemple : Reconnaître graphiquement la convexité
Vidéo mathssa.fr/convexite2
Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l'intervalle $[-3\,;\,5]$.

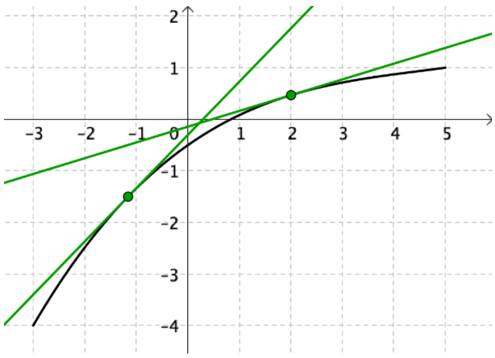
a)



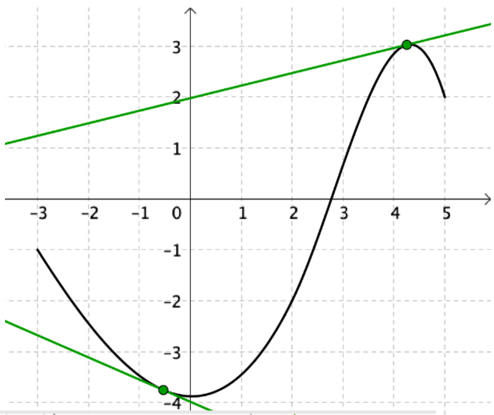
b)



Correction
a) La fonction est concave sur [-3 ;5] car sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est convexe sur [-3 ;2] puis concave que [2 ;5]



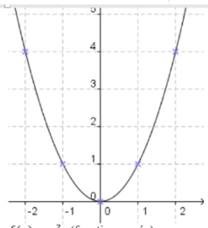
Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3.Propriétés

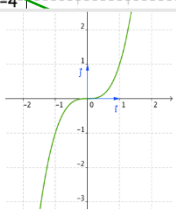
Propriétés : fonctions vues en seconde

- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

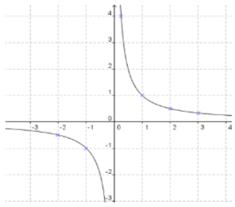
- Admis -

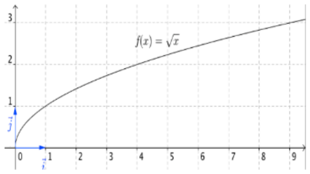


$f(x) = x^2$ (fonction carrée)



$f(x) = x^3$ (fonction cube)



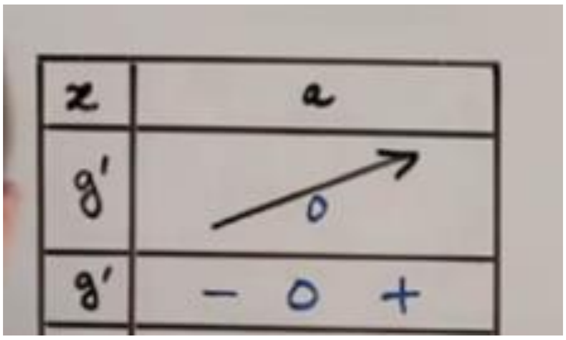


Propriété :
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- la fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I,soit $f''(x) \geq 0$.
- la fonction f est concave sur I si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I,soit $f''(x) \leq 0$

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Démonstration au programme :
Vidéo mathssa.fr/convexite3

- Démontrons que : si f' est croissante alors f est convexe:
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.
Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
$g''(x) = f''(x)$ Or f' est croissante sur I, donc $f''(x) \geq 0$
Ainsi $g''(x) \geq 0$. $Ainsi$ g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.



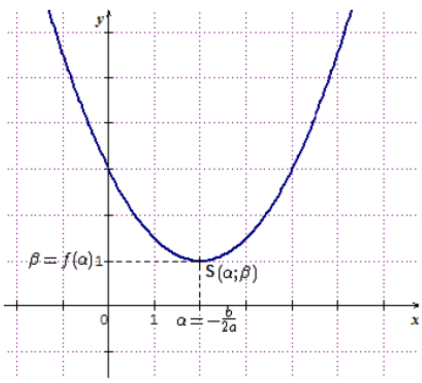
Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

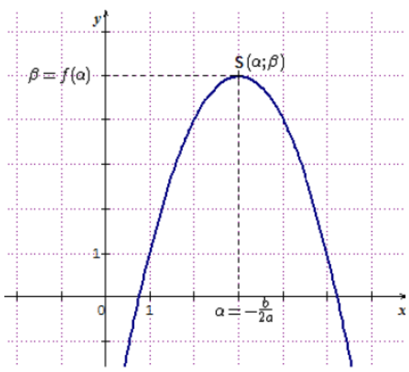
En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Soit $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que : si f' est décroissante alors f est concave.

$a > 0$



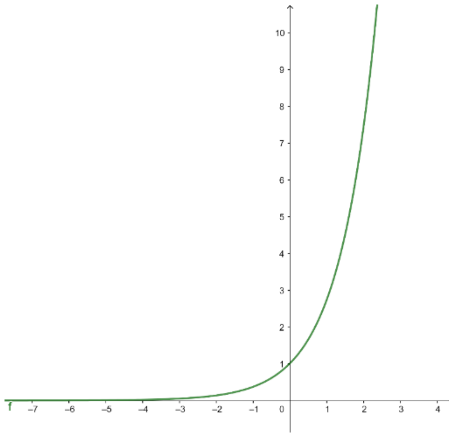
$a < 0$



Propriété : Soit f le **polynôme du second degré** défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $a > 0$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, f est concave sur $\mathbb{R}$.

Eléments de preuve : $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$

<u>Propriété</u>
La fonction exponentielle est convexe sur ℝ.



Preuve : $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$
Or $e^x > 0$. Ainsi $f''(x) > 0$ et f est donc convexe sur ℝ.

<u>Exemple :</u> Étudier la convexité d'une fonction

Vidéo mathssa.fr/convexite4

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f.

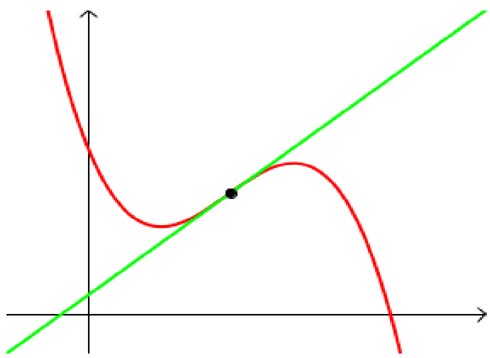
Correction
f est dérivable sur ℝ en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour f'.
Pour tout réel x,
$f'(x) = x^2 - 18x$.
$f''(x) = 2x - 18$
$2x - 18 = 0\ si\ x = 9$

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$f'(x)$					
$f''(x)$		-	0	+	
Convexité ou concavité		concave		convexe	

Donc f est concave sur $]-\infty\,; 9]$ et f est convexe sur $[9\,;\ +\infty[$.

<u>4.Point d'inflexion</u>

<u>Définition :</u> Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.

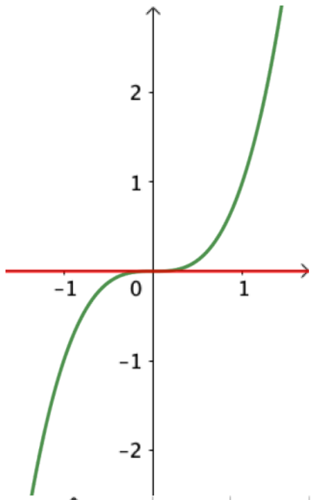


<u>Propriété :</u>
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

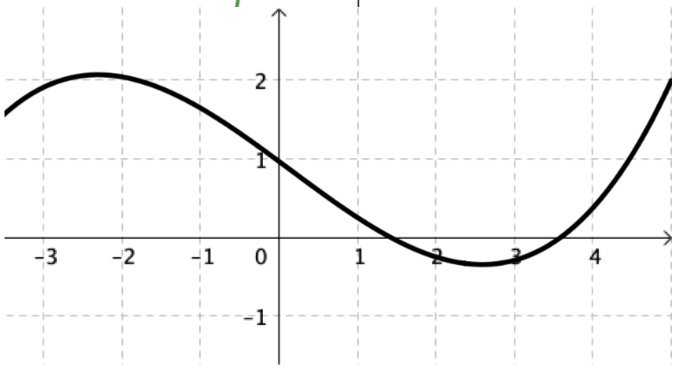
<u>Exemple :</u>
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.
L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

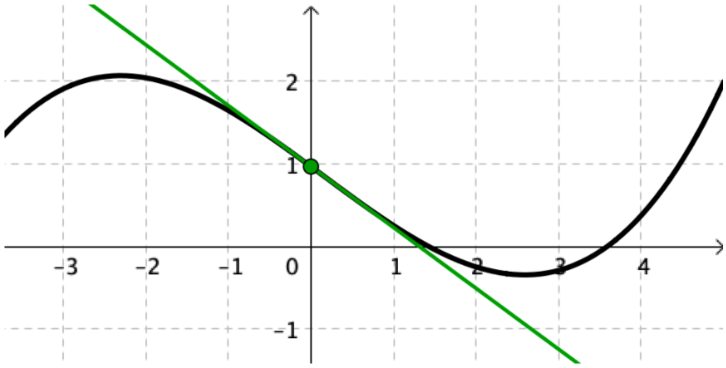
La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.



<u>Méthode :</u> Reconnaître graphiquement un point d'inflexion
Vidéo mathssa.fr/inflexion
Déterminer graphiquement le point d'inflexion de la fonction représentée ci-dessous.



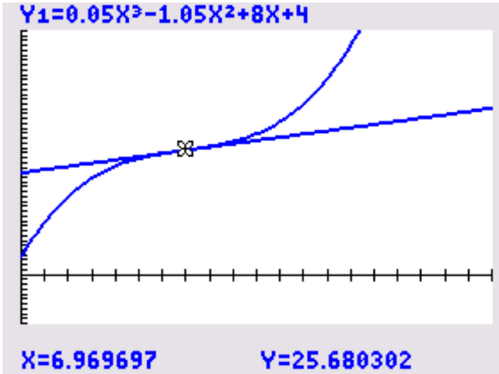
Correction
La fonction est d'abord concave sur]-∞ ;0] puis convexe sur [0 ;+∞[. Le point de coordonnées (0 ; 1) semble être un point d'inflexion de la courbe.



<u>Méthode :</u> Étudier la convexité pour résoudre un problème
Vidéo mathssa.fr/inflexion2

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :
$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$, définie sur l'intervalle [0 ; 10].

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.



Correction
1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle
[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.

2) C est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour C'.
Pour tout réel x,
De [0 ;10]
$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$
$C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$
$C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$
Or, $0{,}3x - 2{,}1 = 0$ pour $x = 7$.On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		$-$	0	+	
$C'(x)$					
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7) = 25{,}7$.Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.
3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication C ralentie.
Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo :mathssa.fr/inflexion3
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

Correction
a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Il en est de même pour f'.
Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 4x$. $f''(x) = 6x - 4$ qui s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

x	-∞		$\frac{2}{3}$		+∞
$f'(x)$					
$f''(x)$		-	0	+	
Convexité ou concavité		concave		convexe	

Donc f est concave sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ et f est convexe sur $\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1 est de la forme :

$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$
On a : $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$
$f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$

Donc, l'équation de la tangente en –1 est : $y = 7(x+1) - 3$ soit : $y = 7x + 4$

c) f est concave sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.
Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en –1.
On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$.
Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ et donc en particulier pour tout x négatif.