**CHAPITRE 2 : limites d’une fonction , continuité et valeurs intermédiaires**

**I-Définitions des limites – notion d’asymptote**

Introduction :vidéo : mathssa.fr/limites (les 4 1ères minutes)

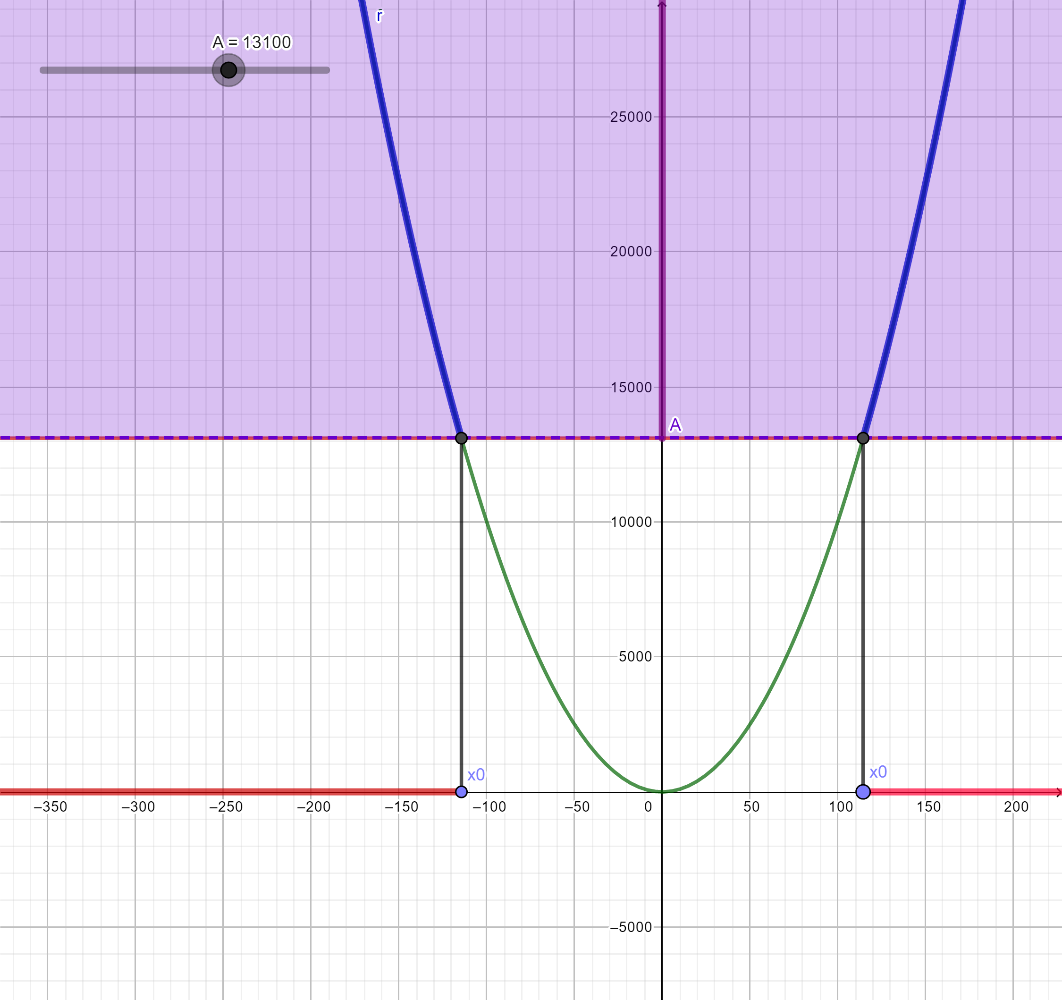
**1.Limite en + ou -∞ :**

**Exercice d’approche :**Soit *f* la fonction définie sur par

Essayons de placer les images de *f* dans un intervalle aussi grand soit il …..

|  |  |
| --- | --- |
| **Par le calcul**  Résolvons l’inéquation  *équivaut à*  *équivaut à*    Résolvons l’inéquation  *(A>-1)*  *équivaut à*  *équivaut à*  *(la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ;+∞[)*  **On dira que :** tout **intervalle ouvert ]A ;+∞[** contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment grand** . | **Graphiquement :**    Là encore , tout **intervalle ouvert ]A ;+∞[ (1)** contient tous les réels *f(x) (2)* dès que *x* est **suffisamment grand** (3). |

vidéo : mathssa.fr/limites (de la 4ème à la 10ème minute)

**Définitions (limites en + ou -∞)**

La fonction *f* admet pour limite +∞ en +∞ si et seulement si

**tout intervalle ouvert de la forme**  contient tous les réels dès que est **suffisamment grand** .

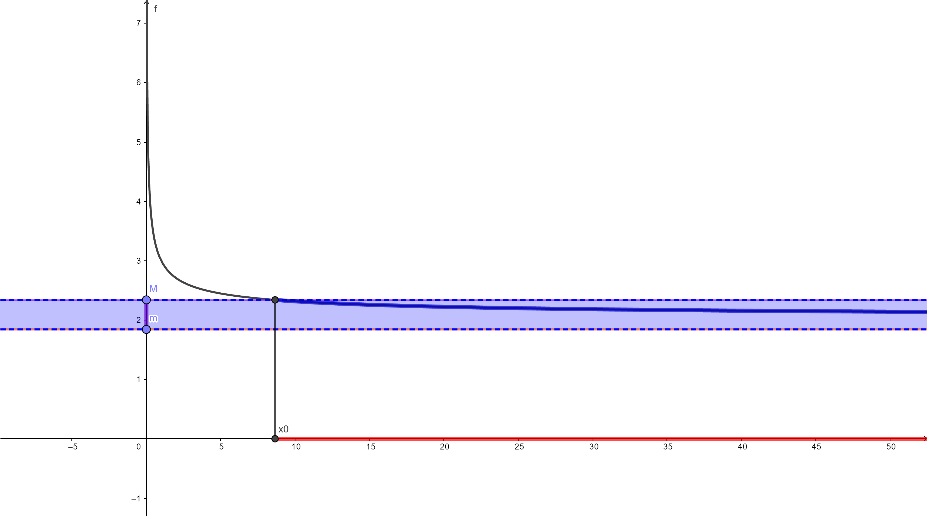
On note :

.

**Remarque** : pour une limite égale à -∞, on remplace par .

Pour une limite en – infini , on remplace est suffisamment grand par est suffisamment petit.

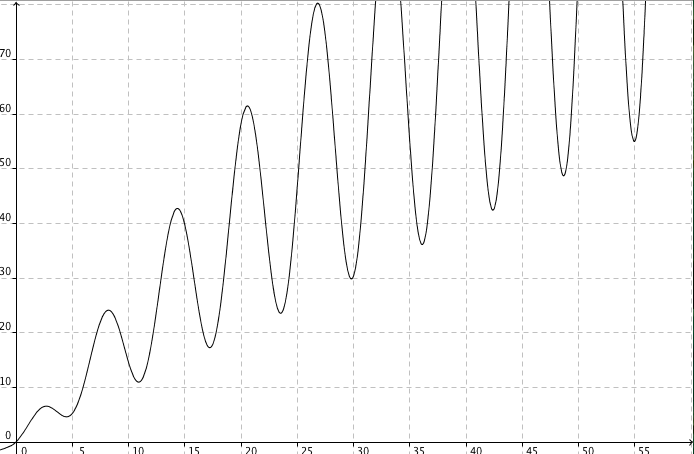
vidéo : mathssa.fr/limites (de la 10ème minute à la 17ème minute)



La fonction *f* admet pour

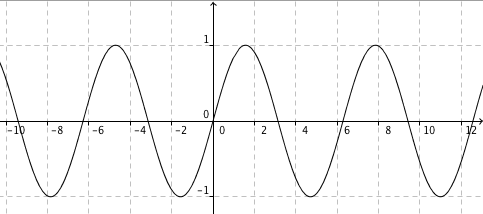
limite l en +∞ si et seulement si

tout intervalle ouvert contenant l du type ]m ;M[ contient tous les réels dès que est **suffisamment grand.** On note : l



Remarques :

- Une fonction qui tend vers lorsque tend vers n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite en plus ou moins l’infini. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

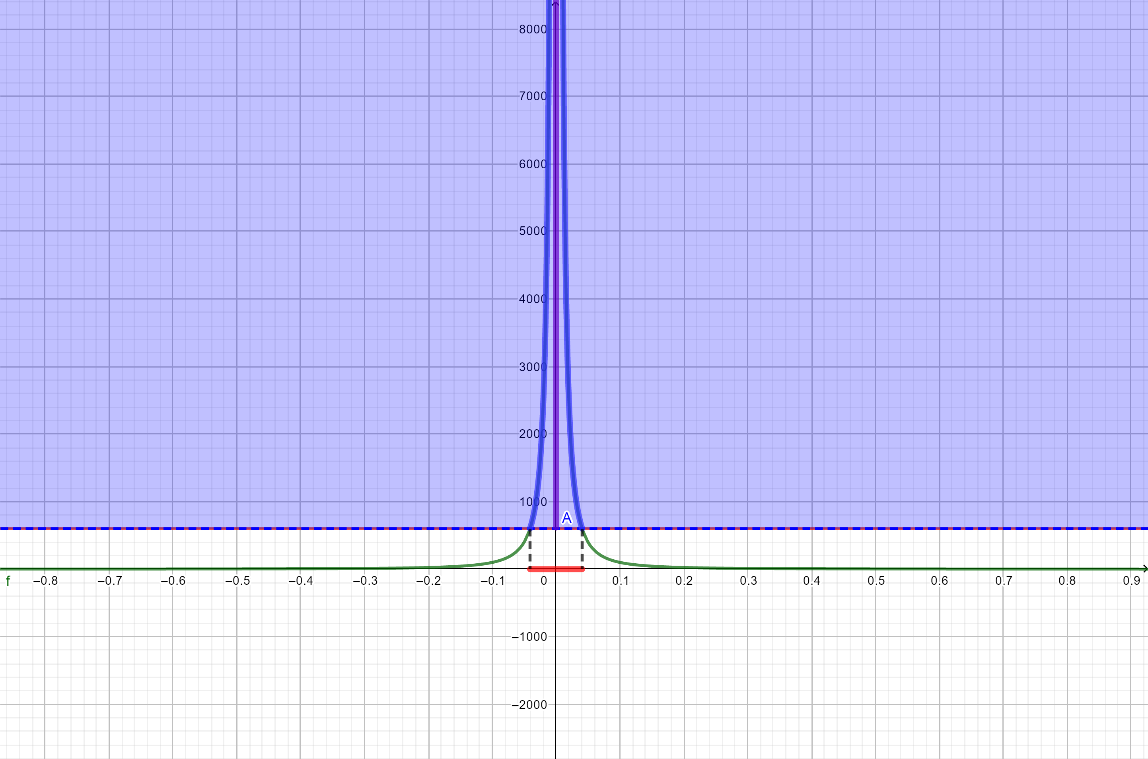
**2.Limite en un réel**

vidéo : mathssa.fr/limites (à partir de la 20ème minute)

**Définitions (limite en un réel )**

**Remarque :**Il arrive souvent qu’on soit amené à définir des limites *« d’un seul côté de a »* .

Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a**

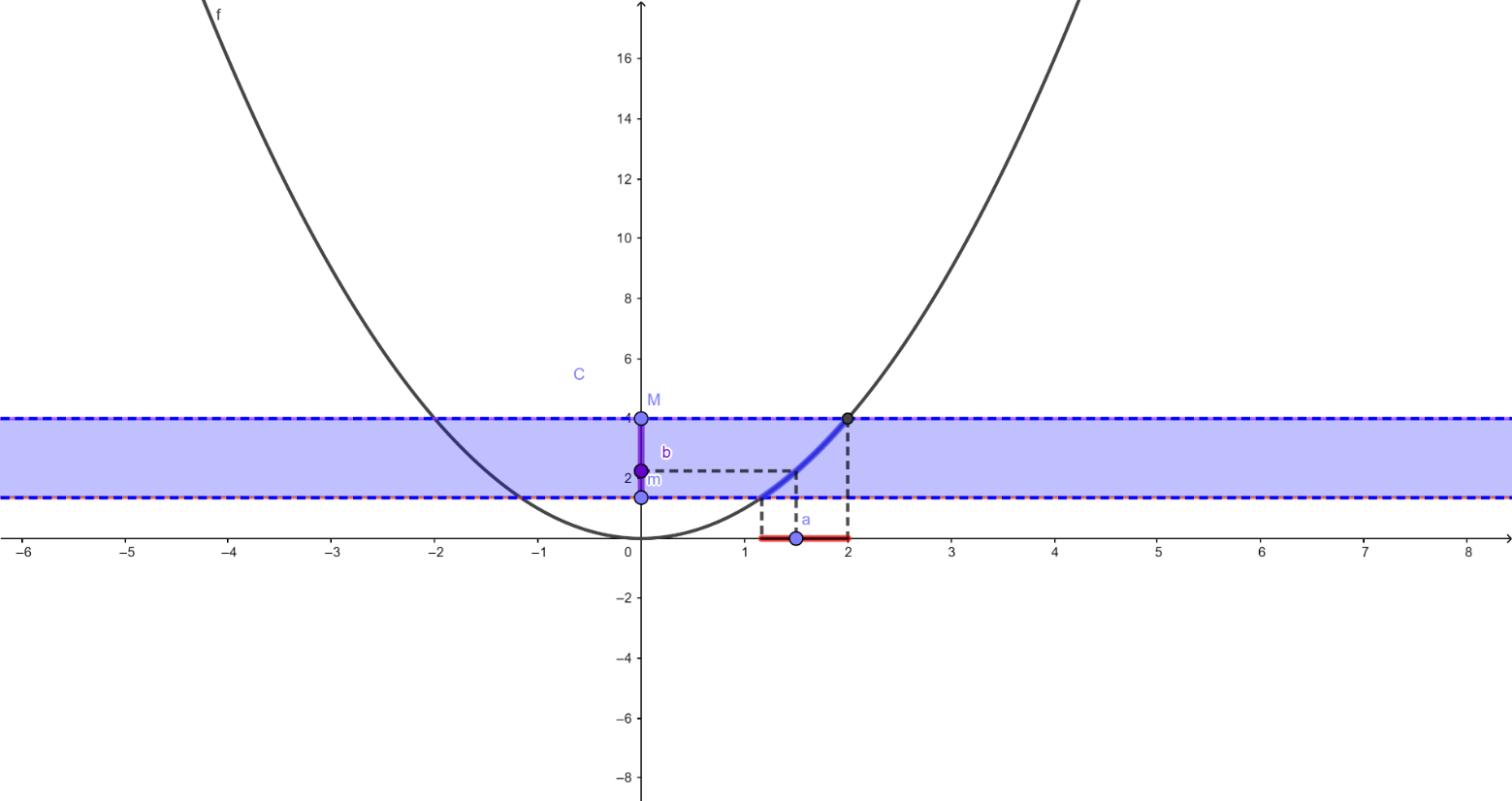


La fonction *f* a pour limite + en *a* si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme **contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment proche de *a*** .

On notera .

La fonction *f* a pour limite **l** en *a* si et seulement si **tout intervalle ouvert contenant l du type ]m ;M[** contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment proche de *a*** .

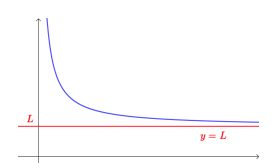
On notera l



**3.Notion d’asymptote**

**3.Notion d’asymptotes**

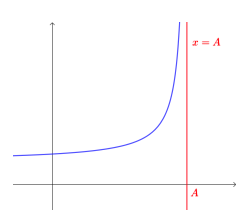
**3.Notion d’asymptotes-limites de référence**

**Définition d’une asymptote horizontale**

- La droite d'équation *y=* lest asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction *f* en  si l

- La droite d'équation *y=* l est asymptote horizontale à la courbe représentative de la

fonction *f* en si l

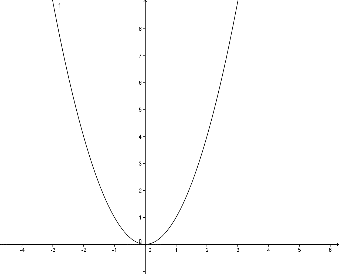


**Définition d’une asymptote verticale**

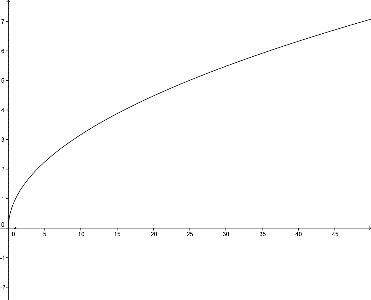
La droite d'équation *x=a* est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction *f* si

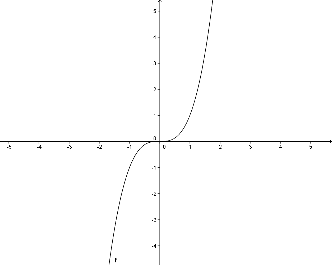
Remarque : cela fonctionne aussi pour les limites à droite ou à gauche

**Propriétés :limites de référence (sans exp et ln)**



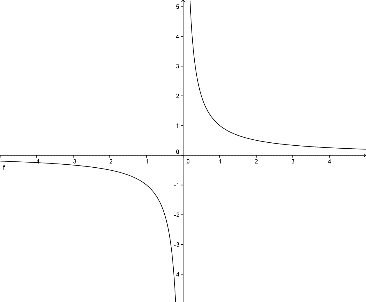
- +∞ ,  +∞





- +∞ , -∞

- +∞



- 0 , 0

**-∞  ; +∞  ;**

L’axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en l’infini

L’axe des ordonnées **est une asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

**Remarque importante** : dorénavant, il faudra indiquer les limites dans les tableaux de variations.

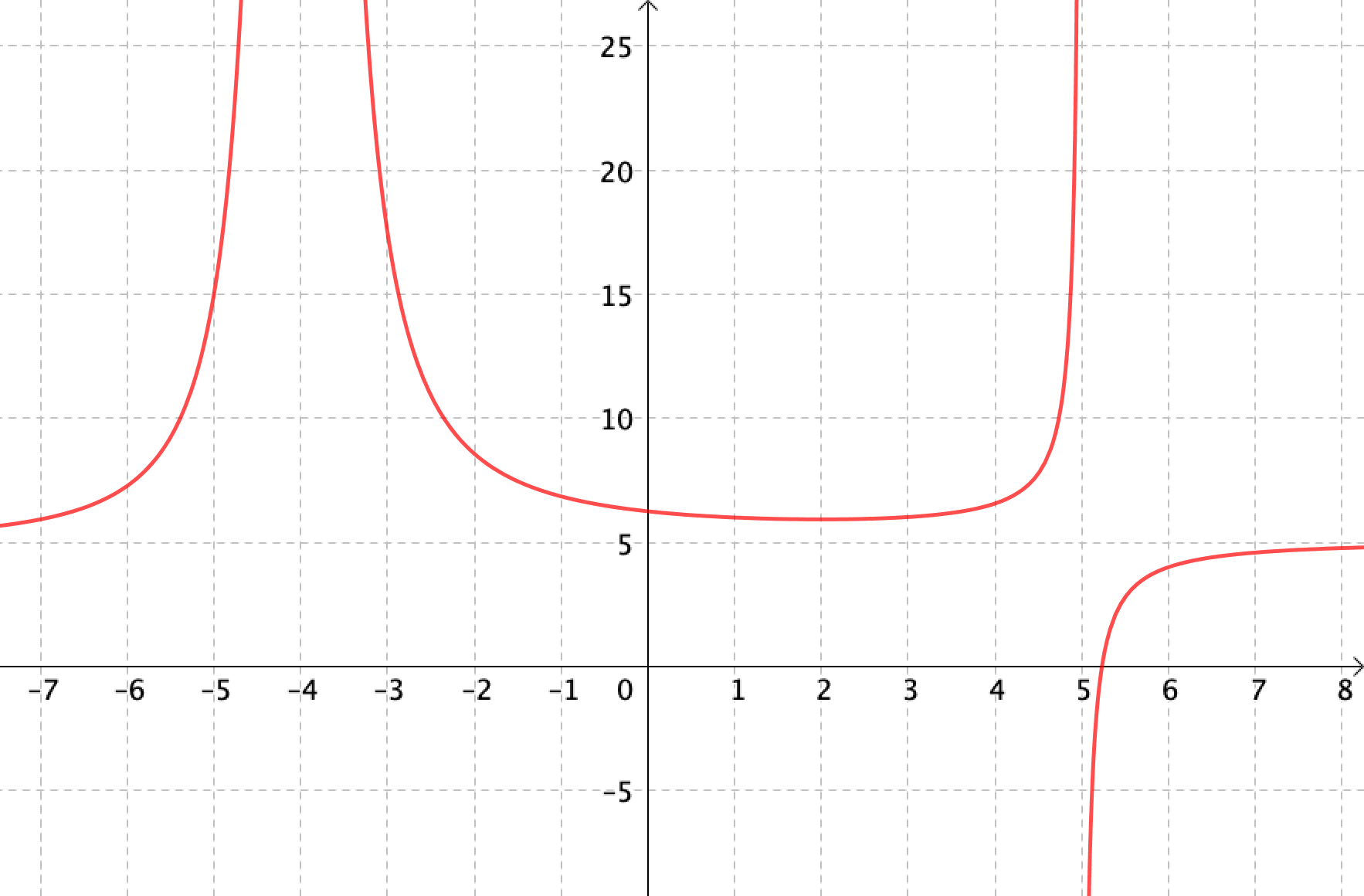
**4.Exercice type :**

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction .

a) Lire graphiquement les limites en en , en et en . En déduire les asymptotes et les représenter graphiquement.

b) Compléter alors le tableau de variations de .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |



**Correction**

a) ●

La courbe de admet donc une asymptote horizontale d’équation en et

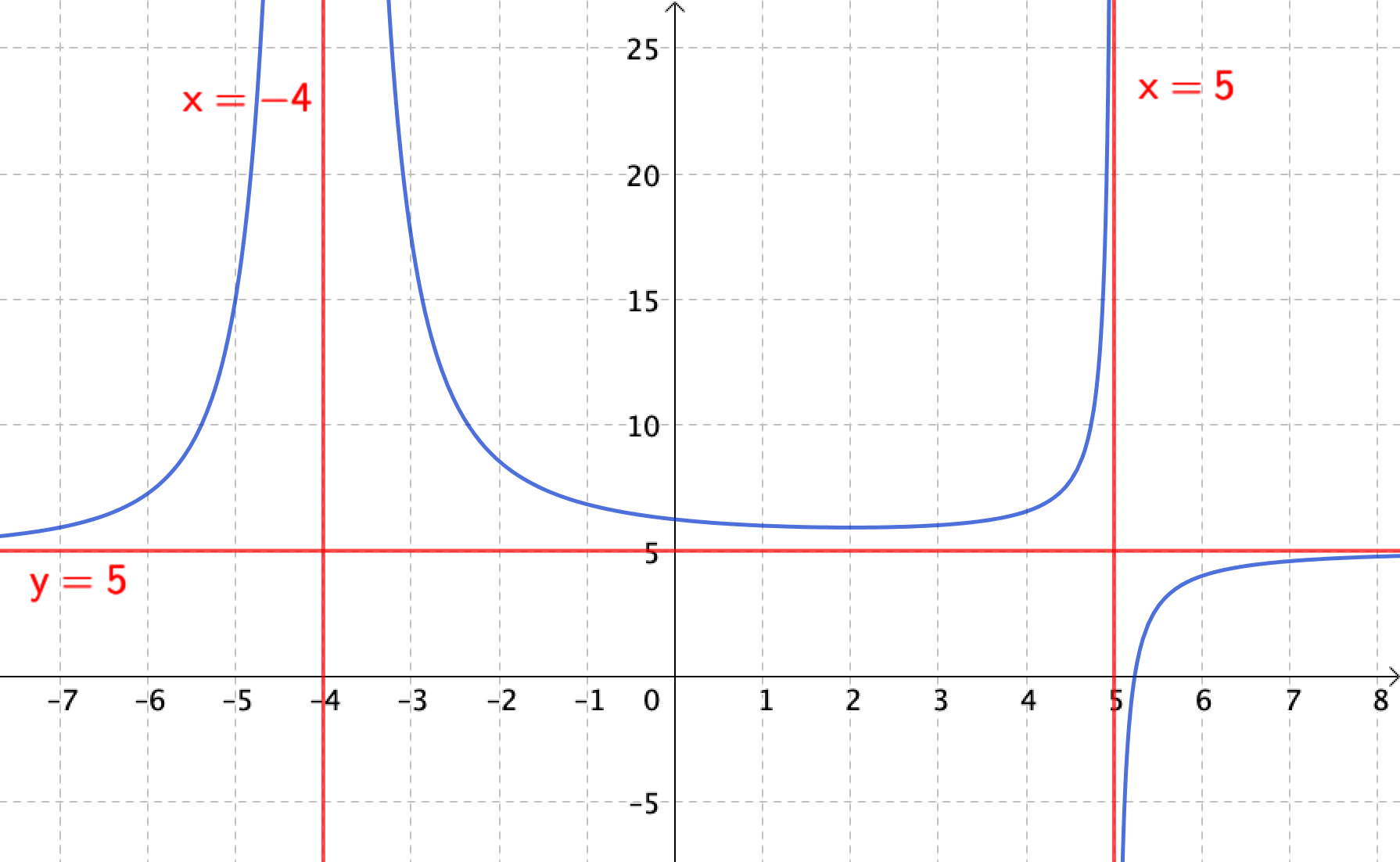
● . La courbe de admet donc une asymptote verticale d’équation

● et

La courbe de admet donc une asymptote verticale d’équation

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

b)



**II-Continuité d’une fonction – théorème des valeurs intermédiaires**

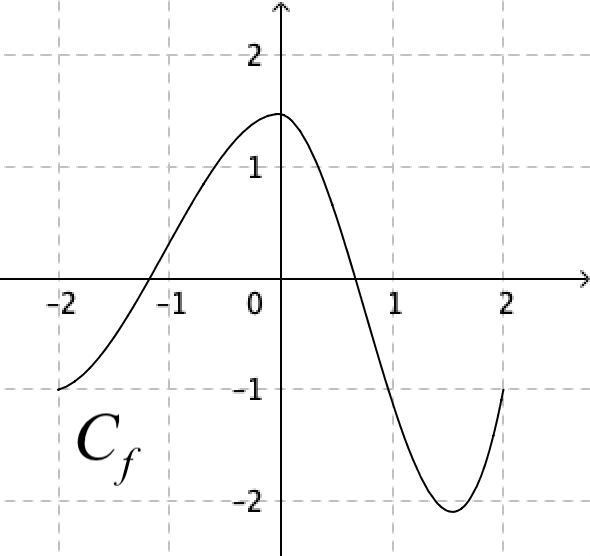
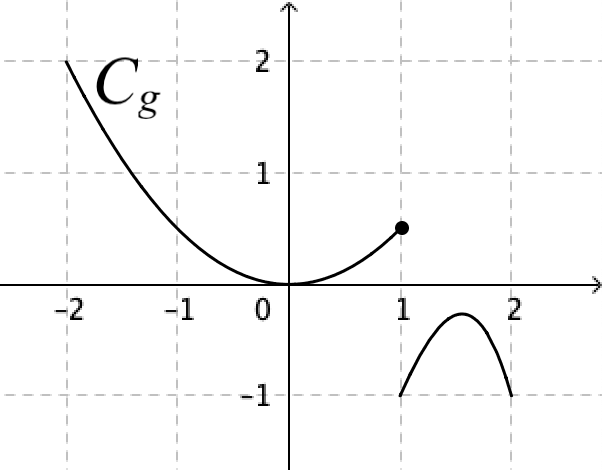
**1.Définition de la continuité d’une fonction – exemples**

**Définition intuitive :**

une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Exercice: reconnaître graphiquement une fonction continue

Étudier graphiquement la continuité des fonctions et définies et représentées ci-dessous sur l’intervalle .

**Correction**

● La courbe de la fonction peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l’intervalle .

● La courbe de la fonction ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n’est donc pas continue sur l’intervalle .

Cependant, elle semble continue sur et sur .

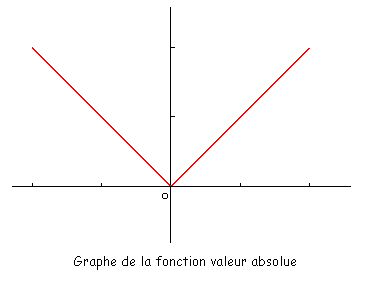
**Définition rigoureuse:** Soit une fonction définie sur un intervalle contenant un réel .

*-*  est continue en si : .

*-*  est continue sur si est continue en tout point de .

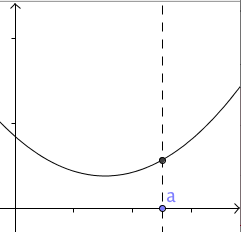
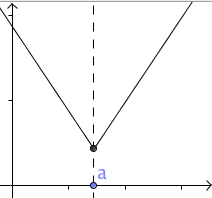
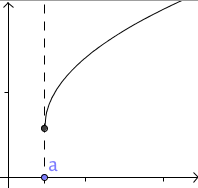
**Théorème :**

Si une fonction est dérivable sur un intervalle , alors elle est continue sur cet intervalle.

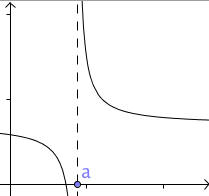
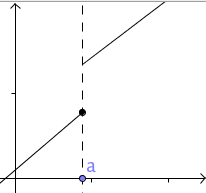
*- Admis –*

La réciproque est fausse. Contre -exemple : la fonction valeur absolue est continue sur mais est non dérivable sur car non dérivable en 0.

Exemples et contre-exemples :

est continue en a est continue en a est continue en a

n'est pas continue en a n'est pas continue en a

**Remarques :** toutes les fonctions de référence connues sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition. Par exemple , la fonction inverse est continue sur ]-∞ ;0[ et sur ]0 ;+∞[

**Propriétés :**

et sont deux fonctions continues sur un intervalle .

● , , () et sont continues sur .

● Si ne s’annule pas sur , alors est continue sur .

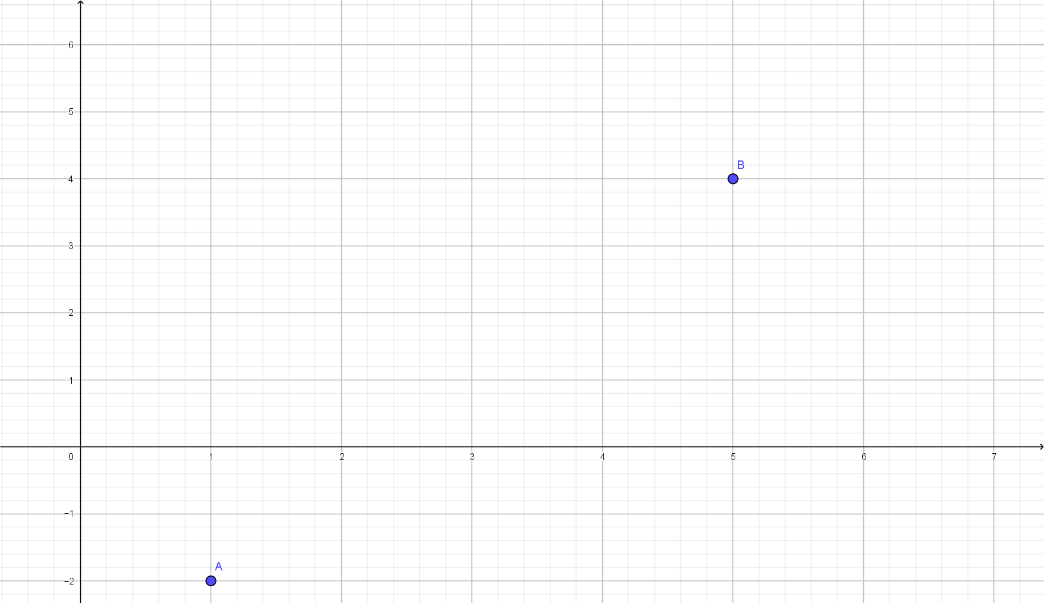
● Si est positive sur , alors est continue sur .

**Remarque importante:** dans la pratique, les flèches obliques d’un tableau de variations traduisent la continuité et la **stricte** monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré.

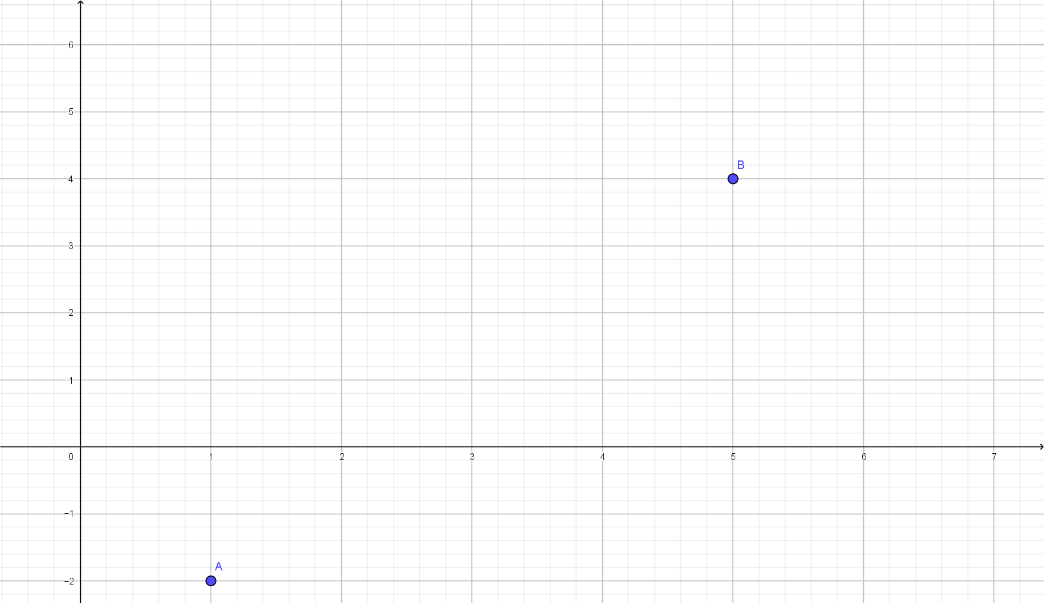
**2.En route vers le théorème des valeurs intermédiaires**

**Exercice :**Considérons une fonction *f* définie sur telle que

1.On veut que l’équation n’admette aucune solution. Représenter une courbe répondant à ce critère.

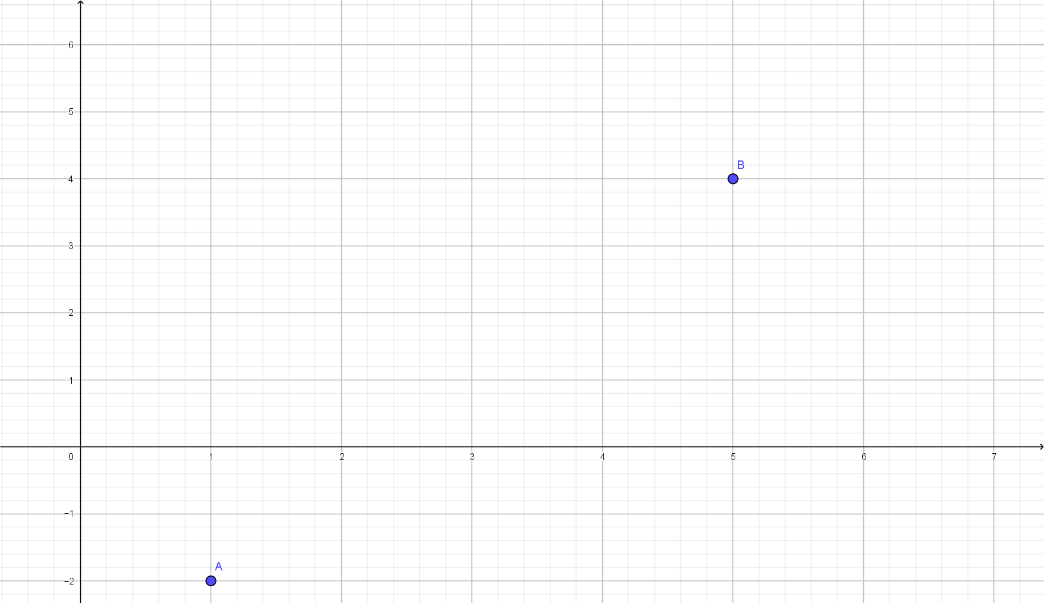


2.On veut que l’équation admette plusieurs solutions. Représenter une courbe répondant à ce critère.



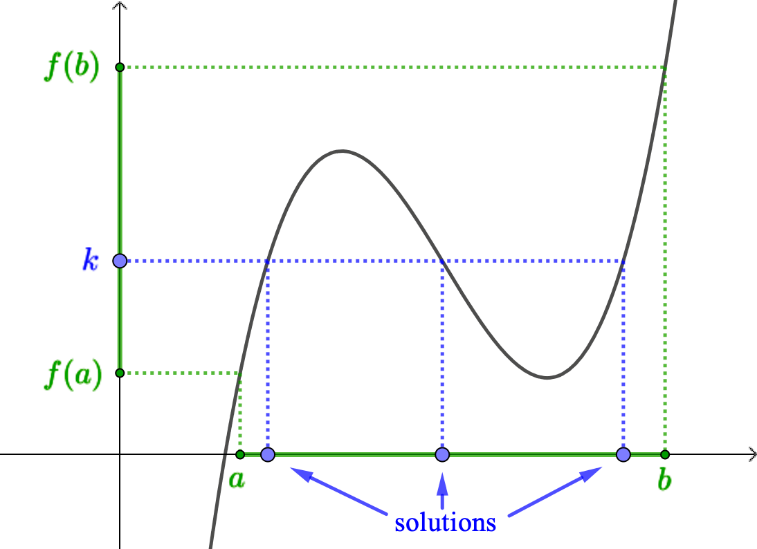
L’équation *f(x)=0* admet au moins une solution si  **est continue sur**

3.On veut que l’équation admette une seule solution. Représenter une courbe répondant à ce critère.



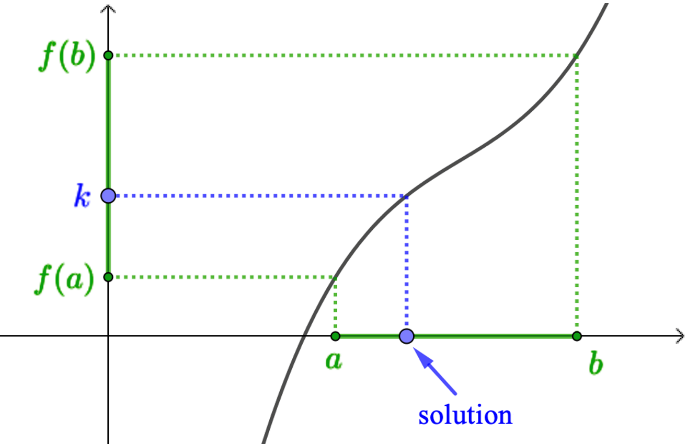
L’équation *f(x)=0* admet une unique solution si  **est continue et strictement croissante sur**

**3.Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire**

**Théorème des valeurs intermédiaires**

si une fonction est **continue** sur l’intervalle alors pour tout réel compris entre et , l’équation admet au moins une solution comprise entre et .

**Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

si une fonction est **continue** et **strictement monotone** sur l’intervalle alors pour tout réel compris entre et , l’équation admet une unique solution comprise entre et .

**Remarque : le théorème et son corollaire se généralisent aux intervalles non bornées…**

**Corollaire (changement de signe):**

*a* et *b* désignent deux réels d’un intervalle I.

si *f* est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I et si *f(a)* et *f(b)* sont de signe contraire alors l’équation admet une unique solution comprise entre *a* et b.

**Point méthode :**

pour montrer qu’une équation admet une unique solution sur un intervalle.

* Citer les hypothèses : **continuité** et **stricte** **monotonie.**
* Montrer que la valeur est une valeur « **intermédiaire** »
* Citer et appliquer le **corollaire du** **théorème des valeurs intermédiaires**

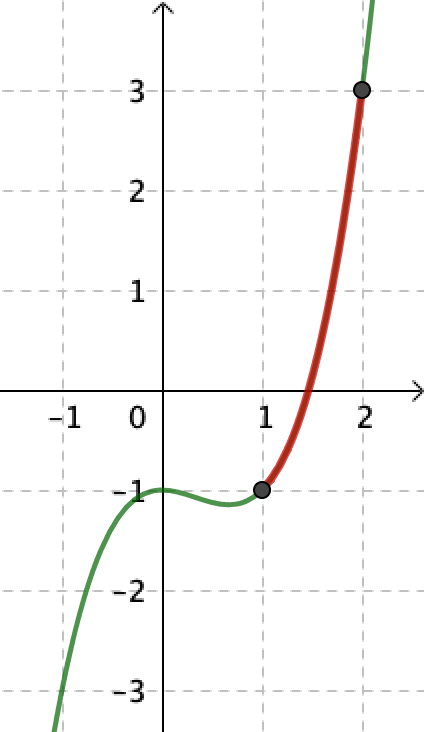
Il est indispensable dans le même temps de compléter le tableau de variations.

**4.Exercice type : valeurs intermédiaires et balayage**

On considère la fonction définie sur par .

1) Démontrer que l'équation admet une unique solution sur l'intervalle .

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution en faisant des balayages de plus en plus précis de cette solution (technique de balayage)



1) • La fonction est **continue** sur l'intervalle car une fonction polynôme est continue sur .

• Pour tout réel de [1 ;2] ,

Les racines de ce polynôme du second degré sont

Donc, pour tout de , .

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur l'intervalle

•

Donc

➡︎ D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l’équation admet alors une unique solution α sur l’intervalle

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision. **Vidéo TI** [**mathssa.fr/balayage**](https://youtu.be/MEkh0fxPakk)

Une image contenant texte, mots croisés

Description générée automatiquementUne image contenant texte, mots croisés

Description générée automatiquement

● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.

car :

● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.

car :

On en déduit , par balayage, que : .

**5.Algorithme de dichotomie**

*f* est une fonction **continue et** **strictement monotone** sur un intervalle [*a ;b*].

On admet que l’équation admet une unique solution *x0* dans l’intervalle [*a ;b*].

**Principe :**Tant que la précision n’est pas atteinte c’est-à-dire tant que on n’a pas trouvé d’intervalle d’amplitude donné contenant x0:

* trouver le « demi-intervalle » c’est-à-dire l’ intervalle deux fois plus petit contenant *x0 .*

**Il y a deux cas de figure :**



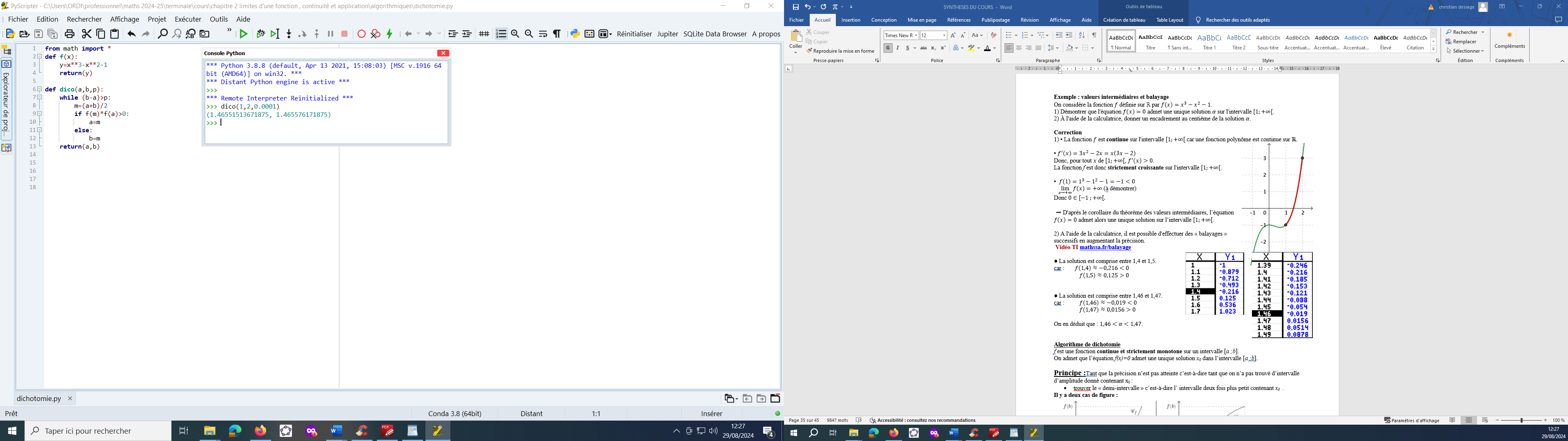
Le « demi -intervalle » est []   Le « demi -intervalle » est []

* on remplace et on réitère le procédé

**Exemple :** on considère la fonction définie sur . par .

On sait que l'équation admet une unique solution sur l'intervalle .

Ecrire une fonction python permettant de déterminer un encadrement avec une précision p=0,0001.



**III-Opérations sur les limites – limite d’une fonction composée**

**1.Opérations sur les limites**

peut désigner , ou un nombre réel. \* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

**SOMME**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | F.I.\* |

**PRODUIT** désigne ou

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou .

**QUOTIENT** désigne ou

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 0 |
|  |  |  |  |  |  | 0 |
|  |  |  |  |  | F.I. | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est ou .

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

Exemple : étudier

**Correction**

a)

Donc , comme limite d'un produit :

**2.Exercice type : lever des formes indéterminées**

Méthode : il faut modifier l’expression d’origine. On pourra penser à une factorisation ou la multiplication par la quantité conjuguée.

Exemple:lever une forme indéterminée à l’aide de la factorisation ou de la quantité conjuguée

Vidéo : [**mathssa.fr/indeterm**](https://youtu.be/8tAVa4itblc) **, mathssa.fr/quantconj mathssa.fr/quantconj2**

Déterminer : a) b) c)

**Correction**

a)

•

On reconnait une forme indéterminée du type

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

•.Donc, par limite d’une somme :

Donc, par limite d’un produit :

Soit : .

b) • On a une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination en factorisant par les monômes de plus haut degré :

• .

Donc, comme limite de sommes :

• Donc, comme limite d’un quotient :

Soit : .

b)• .Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

• Donc, comme limite d’un quotient, on a : .

Soit : .

**3.Limites d’une fonction composée**

Vidéo :mathssa.fr/limitecomposee

Rappel **:**Soit *u* et *v* deux fonctions. La fonction composée est la fonction qui à *x* associe

On notera sous forme schématique :

|  |
| --- |
| *a b c* |

**Propriété (admise) :**

Soit *a , b* et *c* désignent soit des réels , soit +, soit -.

Soit deux fonctions.

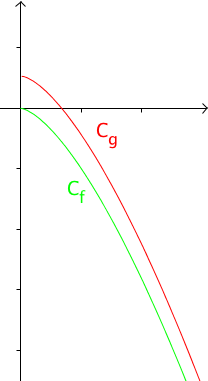
Si  et  alors c.

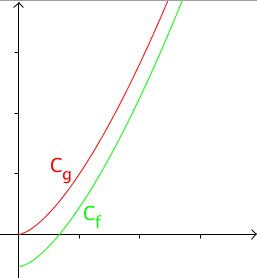
**Exemple :** déterminer .

On peut décomposer la fonction de la manière suivante :

On a et Alors comme limite de fonction composée

**IV-Théorèmes de comparaison et des Gendarmes – application à l’exponentielle**

**1.Théorèmes de comparaison**



|  |  |
| --- | --- |
| Théorème 1 :  Soit et trois fonctions définies sur un intervalle .  Si pour tout de , on a : alors | Théorème 2 :  Soit et trois fonctions définies sur un intervalle .  Si pour tout de , on a alors |

Remarque : On obtient des théorèmes analogues en .

Démonstration dans le cas du théorème 1

donc tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand, soit : .

Or, dès que est suffisamment grand, on a .

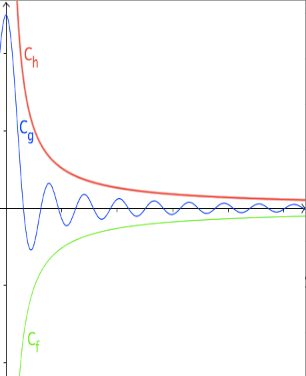
Donc dès que est suffisamment grand, on a : .

Et donc .

Exemple :déterminer :

pour tout réel , donc :

Or : donc d'après les théorèmes de comparaison :

****

**2.Théorème d'encadrement**

Théorème des gendarmes :

Soit , et trois fonctions définies sur un intervalle .

Si pour tout de , on a : alors .

Remarques : On obtient des théorèmes analogues en .Le théorème des gendarmes ne s’applique que pour des limites finies !!!

Exemple :déterminer :

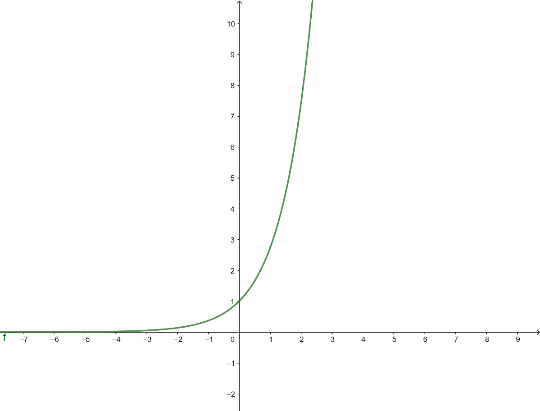
n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

pour tout

Et donc :

Or on a  :

D'après le théorème des gendarmes, on a : .

**3.Limites aux bornes de la fonction exponentielle**

Propriétés :

et

Conséquence graphique :

La courbe de l’exponentielle admet l’axe des abscisses comme asymptote horizontale en -∞

Preuve :

*On a vu dans le dm1 que pour tout réel , .*

Pour tout réel ,

S=]0 ;+∞[

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  | - 0 + |
|  | 0 |

La fonction est décroissante sur ]-∞ ;0] et croissante sur [0 ;+∞[

admet donc un minimum en 0 de valeur

On en déduit le tableau de signes :

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  | + 0 + |

Ainsi, pour tout réel ,et par conséquent et donc

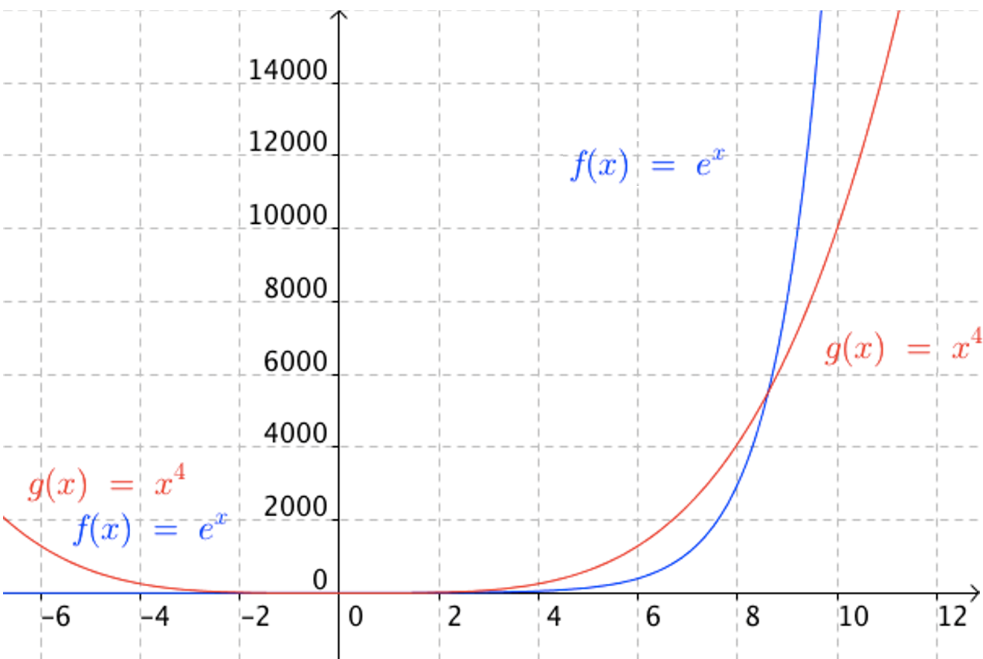
Or : donc d'après le théorèmes de comparaison :

Déterminons On peut décomposer la fonction de la manière suivante :

On a et Alors comme limite de fonction composée

comme limite d’un quotient, .

**4.Croissance comparée de la fonction exponentielle**



Exemple :

On constate que pour suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction puissance .

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Propriétés (croissances comparées) :

a) et pour tout entier ,

b) et pour tout entier ,

Démonstration au programme du a :

**Vidéo : mathssa.fr/croissancecompexp**

- On pose pour .

On a :

On calcule la dérivée de la dérivée .

Et on note

Pour tout strictement positif,

. Ainsi est strictement croissante sur [0 ;+∞[.

On dresse alors le tableau de variations :



.

On en déduit que pour tout strictement positif, et donc .Soit encore : . Comme , on en déduit par comparaison de limites que .

- Dans le cas général, on a :

Or : car on a vu que .

Donc : , car est positif.

Et donc , comme produit de limites infinies.Soit :

Exercice : Calculer une limite par croissance comparée

Calculer la limite suivante :

**Correction**

● Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type "".

Levons l'indétermination :

● Par croissance comparée : et de même : .

Donc, comme inverse de limites : ,

donc .

● Donc, et donc .