CHAPITRE 2 : limites d'une fonction , continuité et valeurs intermédiaires

I-Définitions des limites – notion d'asymptote

Introduction :vidéo : mathssa.fr/limites (les 4 1ères minutes)

1.Limite en + ou -∞ :

Exercice d'approche : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.
Essayons de placer les images de f dans un intervalle aussi grand soit il …..

Par le calcul

Résolvons l'inéquation $f(x) > 10\,000$

$x^2 - 1 > 10\,000$ *équivaut à* $x^2 > 10\,001$

équivaut à $x > \sqrt{10001}$

Résolvons l'inéquation $f(x) > A$ *(A>-1)*

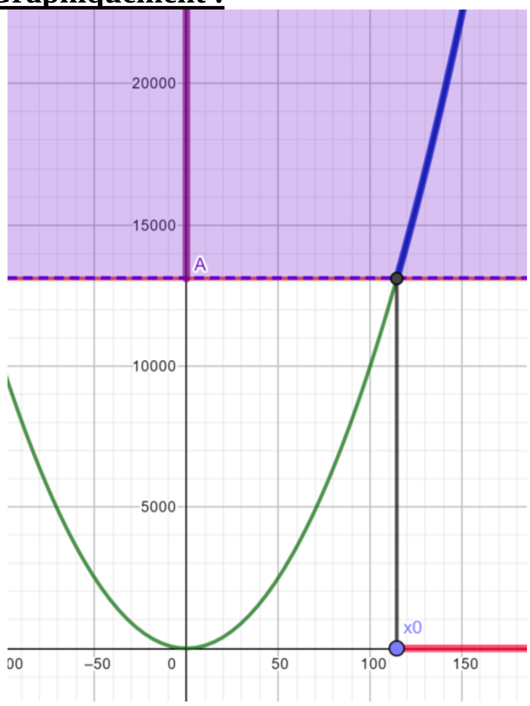
$x^2 - 1 > A$ *équivaut à* $x^2 > A + 1$

équivaut à $x > \sqrt{A+1}$

(la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ;+∞[)

On dira que : tout **intervalle ouvert]A ;+∞[** contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment grand** .

Graphiquement :

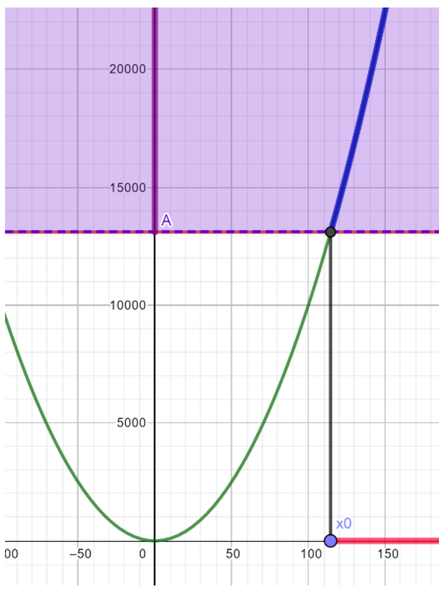


Là encore , tout **intervalle ouvert]A ;+∞[(1)** contient tous les réels *f(x) (2)* dès que *x* est **suffisamment grand** (3).

vidéo : mathssa.fr/limites (de la 4ème à la 10ème minute)

Définitions (limites en + ou -∞)

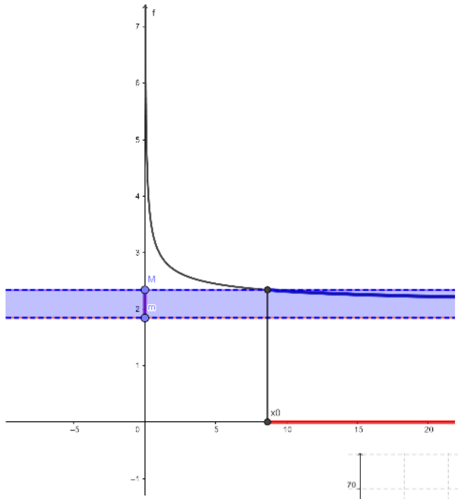
La fonction f admet pour limite +∞ en +∞ si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]A;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment grand** .
On note :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Remarque : pour une limite égale à -∞, on remplace $]A;+\infty[$ par $]-\infty;A[$.
Pour une limite en – infini , on remplace x est suffisamment grand par x est suffisamment petit.

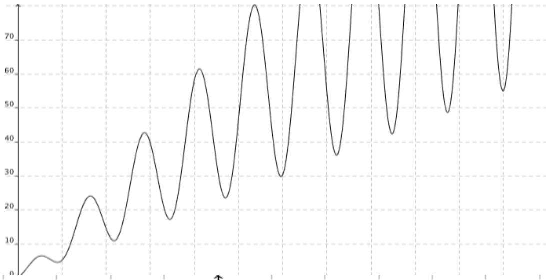
vidéo : mathssa.fr/limites (de la 10ème minute à la 17ème minute)

La fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ du type]m ;M[contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment grand.** On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

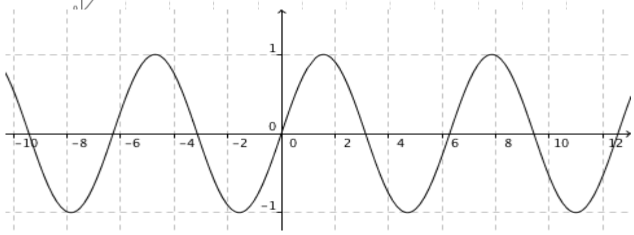


Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite en plus ou moins l’infini. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



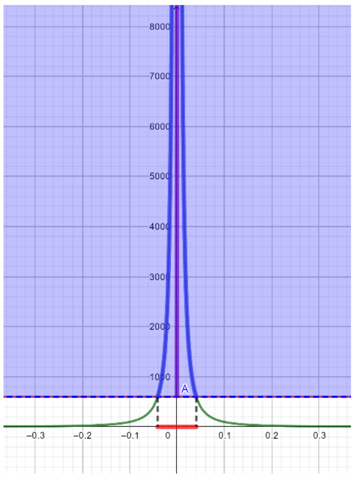
2.Limite en un réel a

vidéo : mathssa.fr/limites (à partir de la 20ème minute)

Définitions (limite en un réel a)

La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]A;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment proche de a** .

On notera $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

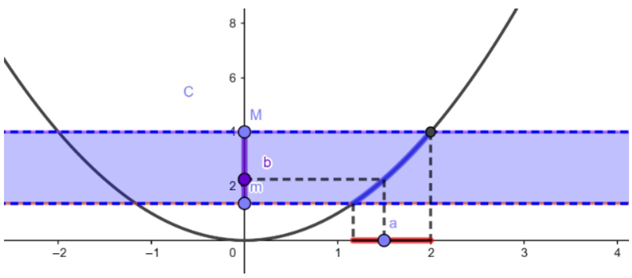


Remarque : Il arrive souvent qu’on soit amené à définir des limites *« d’un seul côté de a »* .

Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a**

La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si **tout intervalle ouvert contenant ℓ du type]m ;M[** contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment proche de a** .

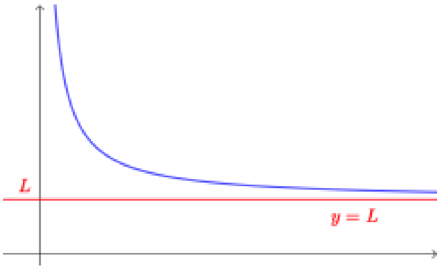
On notera $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$



3.Notion d'asymptotes-limites de référence

Définition d'une asymptote horizontale

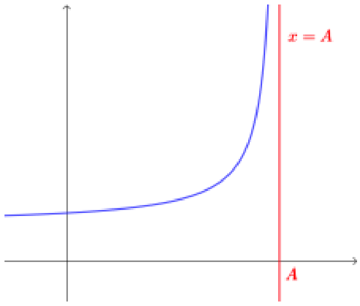
- La droite d'équation $y=\ell$ est <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$
- La droite d'équation $y=\ell$ est <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$



Définition d'une asymptote verticale

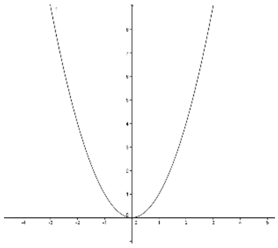
La droite d'équation $x=a$ est <u>asymptote verticale</u> à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

Remarque : cela fonctionne aussi pour les limites à droite ou à gauche

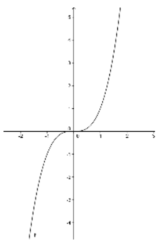


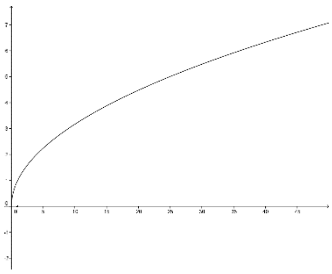
Propriétés :limites de référence (sans exp et ln)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



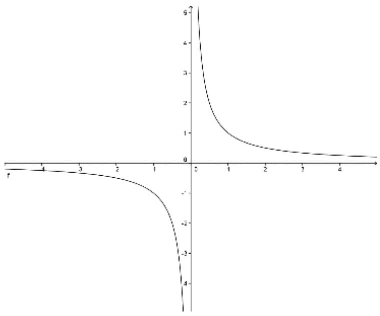
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$





- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$;



L'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en l'infini

L'axe des ordonnées **est une asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

<u>Remarque importante</u> : dorénavant, il faudra indiquer les limites dans les tableaux de variations.

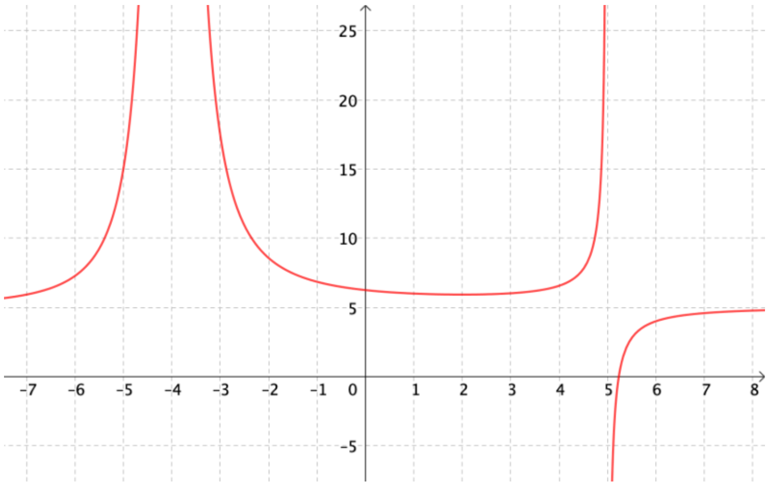
4.Exercice type :

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.

a) Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5. En déduire les asymptotes et les représenter graphiquement.

b) Compléter alors le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					



Correction

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

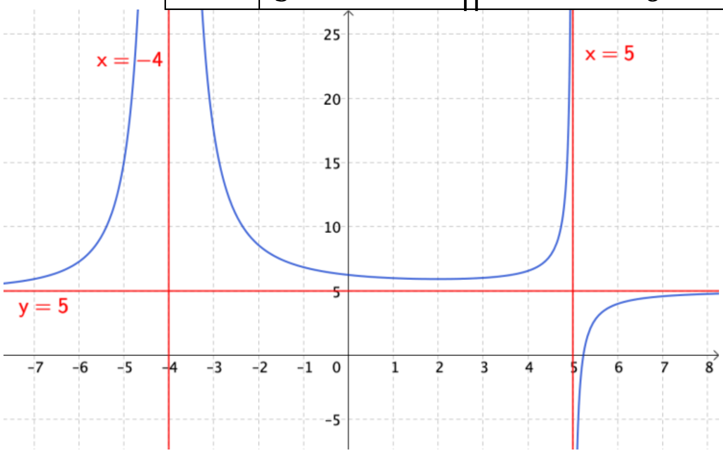
- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = +\infty$. La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

b)

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$ ‖ $+\infty$				$+\infty$ ‖		5
		↗	‖	↘		↗	‖	↗	
	5		‖		6		‖ $-\infty$		



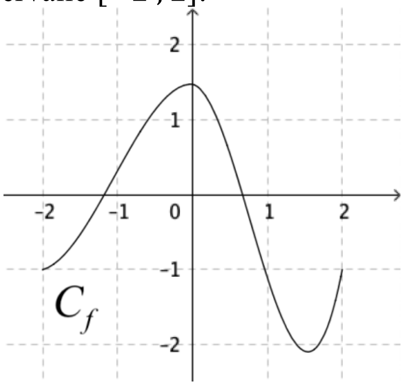
II-Continuité d'une fonction – théorème des valeurs intermédiaires

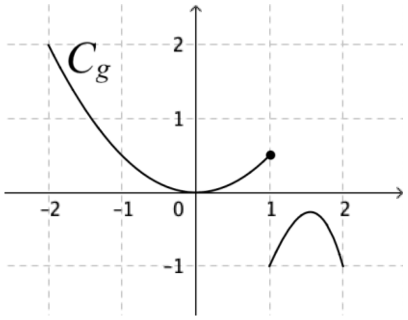
1.Définition de la continuité d'une fonction – exemples

Définition intuitive :
une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Exercice: reconnaître graphiquement une fonction continue

Étudier graphiquement la continuité des fonctions f et g définies et représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-2\,;2]$.





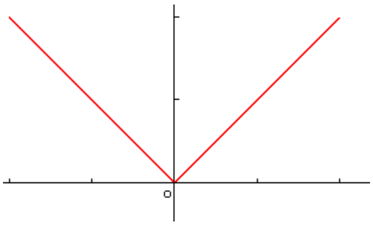
Correction
● La courbe de la fonction f peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

● La courbe de la fonction g ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n'est donc pas continue sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
Cependant, elle semble continue sur $[-2\,;1]$ et sur $]1\,;2]$.

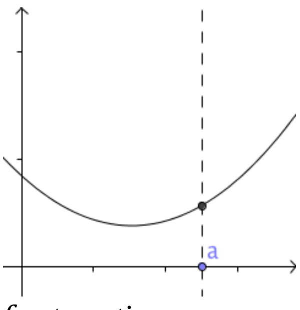
Définition rigoureuse: Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Théorème :
Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.
- Admis –

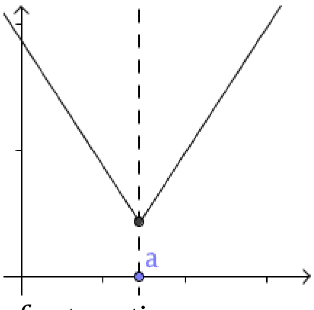
La réciproque est fausse. Contre -exemple : la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais est non dérivable sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en 0.



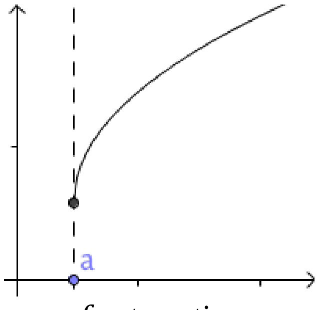
Exemples et contre-exemples :



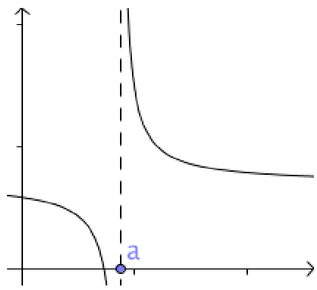
f est continue en a



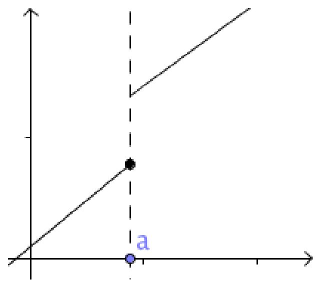
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Remarques : toutes les fonctions de référence connues sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition. Par exemple , la fonction inverse est continue sur]-∞ ;0[et sur]0 ;+∞[

Propriétés :

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

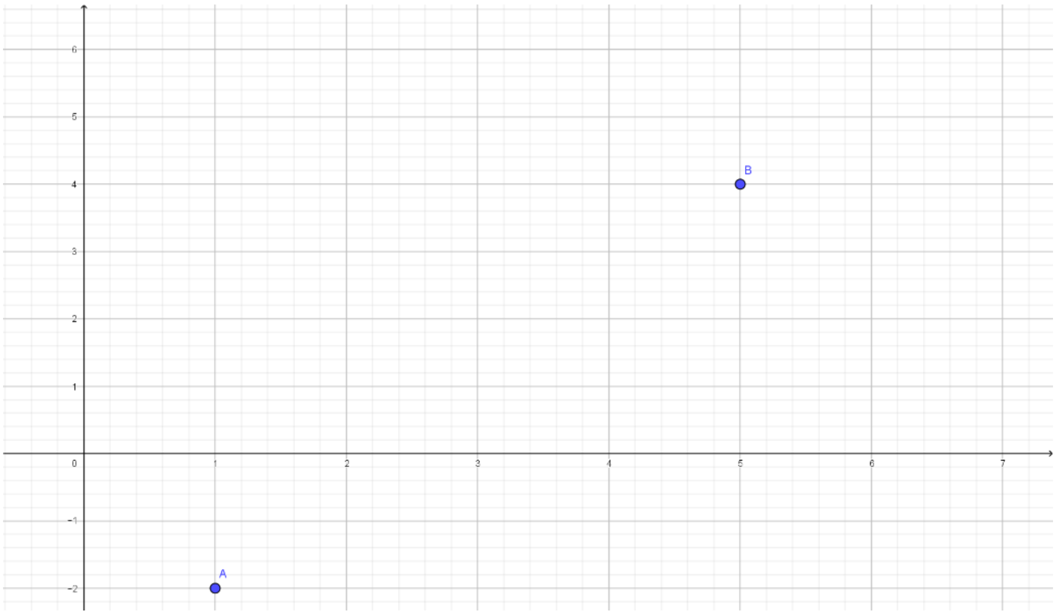
- $f+g$, $f\times g$, f^n $(n\in\mathbb{N})$ et e^f sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Remarque importante: dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la **stricte** monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

2.En route vers le théorème des valeurs intermédiaires

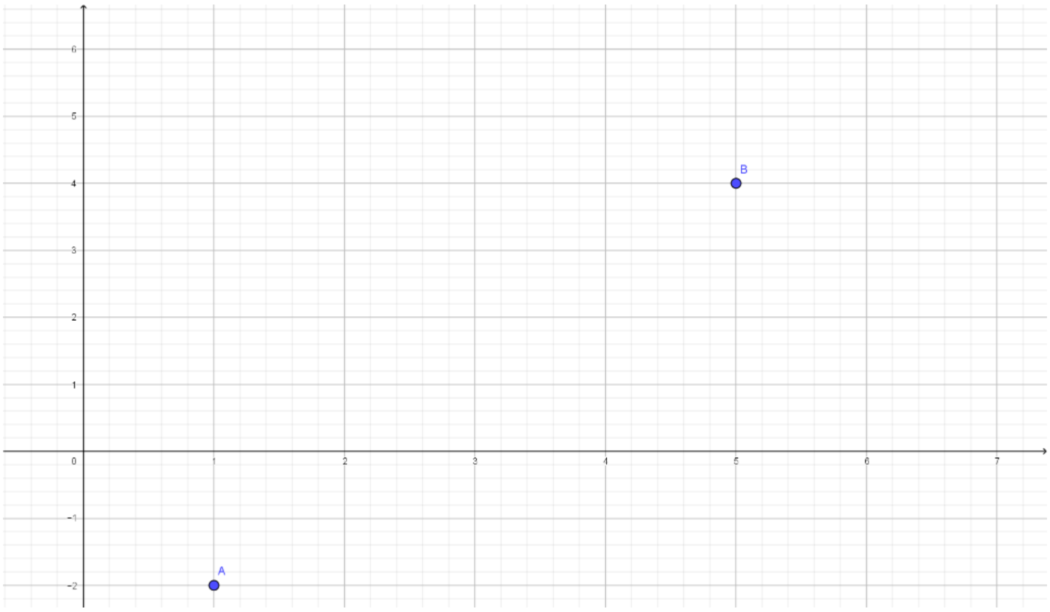
Exercice : Considérons une fonction f définie sur [1 ; 5] telle que $f\ (1) = -2\ et\ f\ (5) = 3$.
1.On veut que l'équation $f(x) = 0$ n'admette aucune solution. Représenter une courbe répondant à ce critère.

2.On veut que l'équation $f(x) = 0$ admette plusieurs solutions. Représenter une courbe répondant à ce critère.



L'équation *f(x)=0* admet au moins une solution si ***f*** **est continue sur** $[\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{5}]$.

3.On veut que l'équation $f(x) = 0$ admette une seule solution. Représenter une courbe répondant à ce critère.

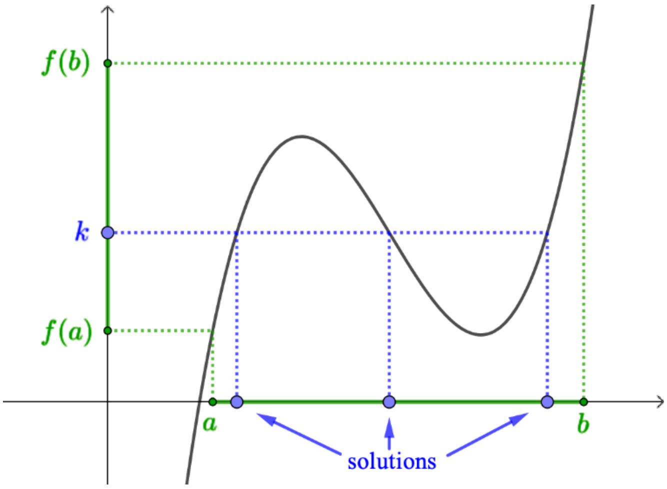


L'équation *f(x)=0* admet une unique solution si ***f*** **est continue et strictement croissante sur** $[\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{5}]$.

3.Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

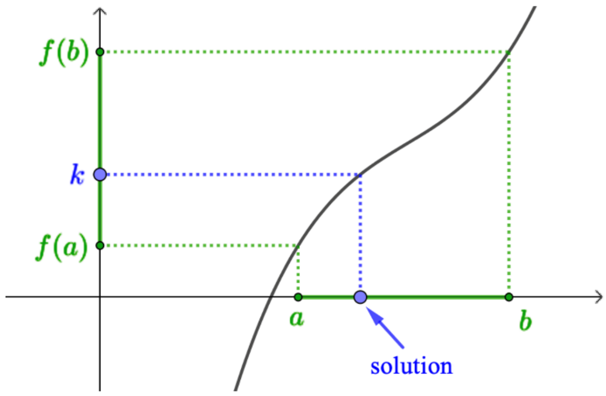
Théorème des valeurs intermédiaires

si une fonction f est **continue** sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

si une fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution comprise entre a et b.



Remarque : le théorème et son corollaire se généralisent aux intervalles non bornées…

Corollaire (changement de signe):

a et *b* désignent deux réels d'un intervalle I.
si *f* est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I et si *f(a)* et *f(b)* sont de signe contraire alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre *a* et b.

Point méthode :

pour montrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle.

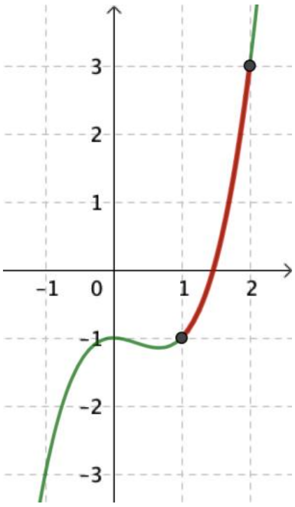
- Citer les hypothèses : **continuité** et **stricte monotonie.**
- Montrer que la valeur est une valeur « **intermédiaire** »
- Citer et appliquer le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

Il est indispensable dans le même temps de compléter le tableau de variations.

4.Exercice type : valeurs intermédiaires et balayage

On considère la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;2]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α en faisant des balayages de plus en plus précis de cette solution (technique de balayage)

1) • La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[1; 2]$ car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.



• Pour tout réel x de [1 ;2] , $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$
Les racines de ce polynôme du second degré sont $0\ et\ \frac{2}{3}$

Donc, pour tout x de $[1; 2]$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[1; 2]$
• $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1 < 0$
$f(2) = 2^3 - 2^2 - 1 = 3 > 0$
Donc $0 \in [-1 ; 3]$.

➞ D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision. **Vidéo TI** **mathssa.fr/balayage**

● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.
car : $f(1{,}4) \approx -0{,}216 < 0$
$f(1{,}5) \approx 0{,}125 > 0$

● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.
car : $f(1{,}46) \approx -0{,}019 < 0$
$f(1{,}47) \approx 0{,}0156 > 0$
On en déduit , par balayage, que : $1{,}46 < \alpha < 1{,}47$.

X	Y1
1	-1
1.1	-0.879
1.2	-0.712
1.3	-0.493
1.4	-0.216
1.5	0.125
1.6	0.536
1.7	1.023

X	Y1
1.39	-0.246
1.4	-0.216
1.41	-0.185
1.42	-0.153
1.43	-0.121
1.44	-0.088
1.45	-0.054
1.46	-0.019
1.47	0.0156
1.48	0.0514
1.49	0.0878

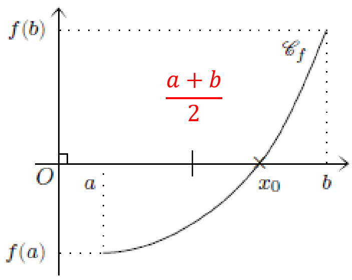
5.Algorithme de dichotomie

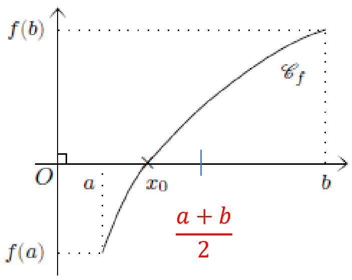
f est une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle [a ;b].
On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle [a ;b].

Principe : Tant que la précision n'est pas atteinte c'est-à-dire tant que on n'a pas trouvé d'intervalle d'amplitude donné contenant x_0 :

- trouver le « demi-intervalle » c'est-à-dire l' intervalle deux fois plus petit contenant x_0 .

Il y a deux cas de figure :





Le « demi -intervalle » est $[\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}; \boldsymbol{b}]$ Le « demi -intervalle » est $[\boldsymbol{a}; \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}]$

- on remplace $\boldsymbol{a\ ou\ b\ par}\ \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$ et on réitère le procédé

Exemple : on considère la fonction f définie sur $[1; 2]$. par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$.
Ecrire une fonction python permettant de déterminer un encadrement α avec une précision p=0,0001.

```python
from math import *
def f(x):
    y=x**3-x**2-1
    return(y)

def dico(a,b,p):
    while (b-a)>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)*f(a)>0:
            a=m
        else:
            b=m
    return(a,b)
```

Console Python

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, :
bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> dico(1,2,0.0001)
(1.46551513671875, 1.465576171875)
>>>
```

III-Opérations sur les limites – limite d'une fonction composée

1.Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel. * Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

SOMME

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$\infty - \infty$ $\qquad$ $0 \times \infty$ $\qquad$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ $\dfrac{0}{0}$

Exemple : étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$

Correction

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = ?$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \; donc \; \lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty\end{cases}$$

Donc , comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = -\infty$

2.Exercice type : lever des formes indéterminées

Méthode : il faut modifier l'expression d'origine. On pourra penser à une factorisation ou la multiplication par la quantité conjuguée.

Exemple:lever une forme indéterminée à l'aide de la factorisation ou de la quantité conjuguée

Vidéo : **mathssa.fr/indeterm** , **mathssa.fr/quantconj** **mathssa.fr/quantconj2**

Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Correction

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1 = ?$

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.\end{cases}$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$-3x^3+2x^2-6x+1 = x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$.Donc, par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3} = -3$

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3} = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\end{cases}$

Donc, par limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1 = -\infty$.

b) • On a une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant par les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2} = 0.$

Donc, comme limite de sommes : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2} = 6$

• Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$.

b)• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5} x - 5 = 5 - 5 = 0 \end{cases}$ .Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

• $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4$.Donc, comme limite d'un quotient, on a :

$\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

3.Limites d'une fonction composée

Vidéo :mathssa.fr/limitecomposee

Rappel :Soit u et v deux fonctions. La fonction composée $v \circ u$est la fonction qui à x associe $v(u(x))$.
On notera sous forme schématique :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[dd] & u(x) & \\ & X \arrow[r, "v"] \arrow[d] & v(X) \arrow[d] \\ a & b & c \end{tikzcd}$$

Propriété (admise) :

Soit a , b et c désignent soit des réels , soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soit u et v deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} (v \circ u)(x) = c$.

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$.

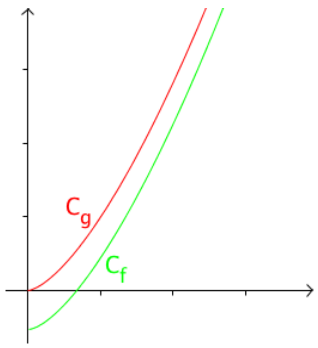
On peut décomposer la fonction de la manière suivante :

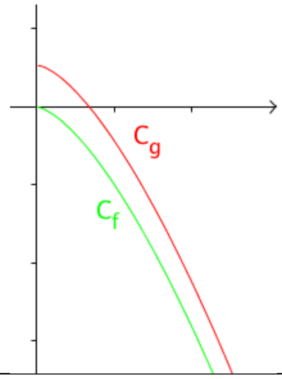
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dd] & 1-\frac{1}{x} & \\ & X \arrow[r] \arrow[d] & e^X \arrow[d] \\ -\infty & 1 & e^1 \end{tikzcd}$$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e^1$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e$

IV-Théorèmes de comparaison et des Gendarmes – application à l'exponentielle

1.Théorèmes de comparaison





Théorème 1 :
Soit f et g trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

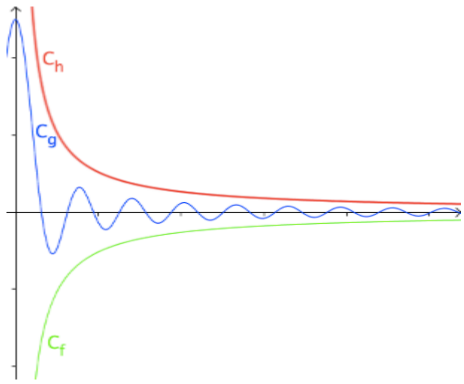
Théorème 2 :
Soit f et g trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

Démonstration dans le cas du théorème 1
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > A$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)\ soit\ g(x) \geq f(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > A$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exemple :déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x)$
pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc : $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$
$x - 1 \leq x + \cos(x)$
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x) = +\infty$

2.Théorème d'encadrement



Théorème des gendarmes :
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Remarques : On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.Le théorème des gendarmes ne s'applique que pour des limites finies !!!

Exemple :déterminer : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}$

$\lim_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.
pour tout x,

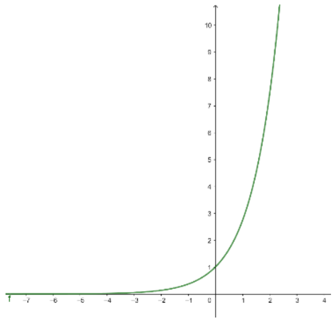
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Et donc :$-\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$

Or on a : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

3.Limites aux bornes de la fonction exponentielle



Propriétés :

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Conséquence graphique :

La courbe de l'exponentielle admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en -∞

Preuve :

1ère partie : prouvons que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

On a vu dans le dm1 que pour tout réel x, $e^x \geq 1+x$.
$g(x) = e^x - 1 - x$. Pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ S=]0 ;+∞[

x	-∞		0		+∞
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	0	↗	

La fonction g est décroissante sur]-∞ ;0] et croissante sur [0 ;+∞[
g admet donc un minimum en 0 de valeur $g(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$.
On en déduit le tableau de signes :

x	-∞		0		+∞
$g(x)$		+	0	+	

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) \geq 0$ et par conséquent $e^x - 1 - x \geq 0$ et donc $e^x \geq 1 + x$

Or : $\lim_{x\to+\infty} 1 + x = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2ème partie : prouvons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}}$

Déterminons $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}$.On peut décomposer la fonction de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & -x & & \\ & & X & \longrightarrow & e^X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -\infty & & +\infty & & +\infty \end{array}$$

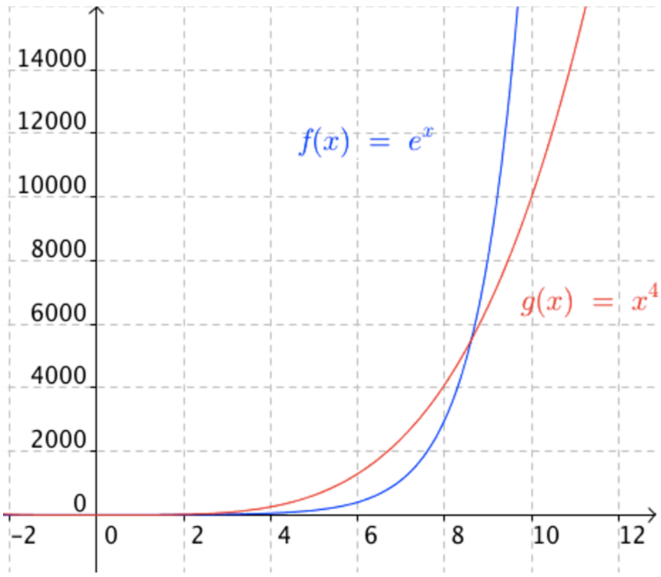
On a $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

comme limite d’un quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

4.Croissance comparée de la fonction exponentielle

Exemple :

On constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction puissance $x \longmapsto x^4$.



Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\,e^x = 0$

Démonstration au programme du a :

Vidéo : mathssa.fr/croissancecompexp

- On pose pour $x \geq 0$, $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$

On calcule la dérivée de la dérivée f' : $(f'(x))' = e^x - 1$.

Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$

Pour tout x strictement positif, $e^x > e^0$ $soit e^x > 1$.

On en déduit que $f''(x) > 0$. Ainsi f' est strictement croissante sur [0 ;+∞[.

$f'(0) = e^0 - 0 = 1$

On dresse alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	1 $\nearrow$	
Signe de $f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	

$f(0) = e^0 - \frac{0^2}{2} = 1.$

On en déduit que pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Exercice : Calculer une limite par croissance comparée

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

Correction

● Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

● Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et de même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Donc, comme inverse de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{x^2}{e^x} = 1$.

● Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1$.