CHAPITRE 4 : la fonction logarithme népérien

I-Historique des logarithmes (sujet du grand oral)

La naissance des tables logarithmiques est le fruit de plusieurs circonstances. Les calculs astronomiques qui se développent au cours du XVIe siècle poussent les mathématiciens à chercher des outils facilitant les calculs de produits et de quotients. Le premier de ces outils est trouvé dans le domaine dans lequel ces calculs sont nécessaires c'est-à-dire le domaine de l'astronomie et de la trigonométrie. Les tables trigonométriques existent depuis plusieurs siècles et, déjà au XIe siècle, l'astronome ibn Yunus les utilise pour réaliser des calculs.

La solution est alors trouvée en dehors du domaine trigonométrique, dans le domaine de l'algèbre. L'étude des suites géométriques est déjà ancienne et l'existence d'une relation entre addition des indices et multiplication des termes de la suite est déjà observée par Archimède dans *L'Arénaire*, ou par Ibn Hamza al-Maghribi en 1591 dans son *Trésor des nombres*. Michael Stifel dans son *Arithmetica integra* de 1544 mène loin cette correspondance effectuant des additions et des soustractions de rang et même travaillant sur des indices fractionnaires.

En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-dessous, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition. Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

De façon simplifiée , si on dispose de la table des puissances de 2 , il est facile d'effectuer le calcul suivant : 1024×1 048 576 :$2^{10} \times 2^{20} = 2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$;

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

John Neper parfois francisé en **Jean Napier**, né le 1er février 1550 et mort le 4 avril 1617, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

L’idée est de créer une fonction que l’on appellera log qui transforme un produit en une somme et qui transforme 10 en 1 c’est-à-dire vérifiant $log(x \times y) = log(x) + log(y)$ et $log(10) = 1$.

Calculer sans calculatrice mais à l’aide de la **table logarithmique** suivante : 392 × 2152.

N	1	…	5	…	392	393	...	2 151	2 152	...	843 574	…	843 584	…	843 594	…	853 574	…	853 584	…
log(N) (arrondi à 6 décimales)	0	…	0,698 970	…	2,593 286	2,594 393	…	3,332 640	3,332 842	…	5,926 123	…	5,926 128	…	5,926 133	…	5,931 241	…	5,931 246	…

$$\begin{array}{l} \quad 392 \quad \rightarrow 2{,}593\ 286 \\ \times\ 2152 \rightarrow +3{,}332\ 842 \\ \hline \\ 843\ 584 \leftarrow 5{,}926\ 128 \end{array}$$

<u>Comment construire la table logarithmique ?</u>

On rappelle que $log(x \times y) = log(x) + log(y)$ et $log(10) = 1$.

<u>A la recherche des logarithmes des puissances de 10 :</u>

Si on remplace x et y par 1 , que trouve t’on ? $\log(1) = \log(1) + \log(1)$ $soit$ $\log(1) = 0$

On suppose que n est un entier naturel. Donner $log(10^n)$ $puis$ $d$onner $log(10^{-n})$.

$log(10^n) = \log\left(\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n\ fois}\right) = \log(10) + \log(10) + \cdots + \log(10) = nlog(10) = n$ et $log(10^{-n}) = -n$.

Il est donc facile de trouver des logarithmes de puissances de 10.

Exemple : $log(0{,}00001) = \log(10^{-5}) = -5$ et $log(100\ 000\ 000) = \log(10^8) = 8$

Si on connait le logarithme des entiers naturels, il est alors facile de déterminer le logarithme de n’importe quel nombre décimal.

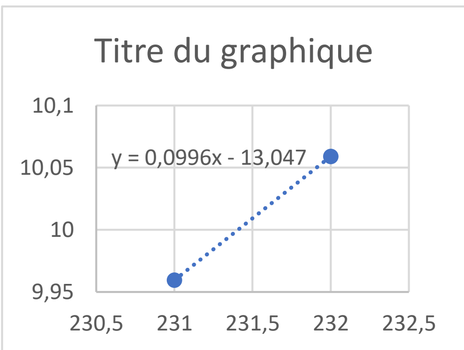
Exemple : $log(2{,}3201) = \log(23\ 201 \times 10^{-4}) = \log(23\ 201) - 4$

<u>A la recherche des logarithmes des nombres entiers :</u>

Principe (génial) : représenter la suite géométrique $(1{,}01)^n$ et les logarithmes associés

n	a=1,01^n	log(a)
0	1	0
1	1,01	
2	1,0201	
3	1,030301	
4	1,04060401	
…	…	
231	9,95949559	
231,4	$1{,}01^{231,4} \approx 10$	1
232	10,0590905	
233	10,1596815	
234	10,2612783	
235	10,3638911	

On sait que l’exposant de 1,01 qui donne 10 et dont le log est 10 sera compris entre ………….. On peut trouver ce nombre grâce à une interpolation linéaire



Par interpolation , on trouve 231,4

Etape 1 :à la recherche de log(1,01)

Déterminer log(1,01) et comparer avec la calculatrice.

$$log(1{,}01^{231{,}4}) = 1 \; d'où \; 231{,}4 \log(1{,}01) = 1 \;\; et \; donc \log(1{,}01) = \frac{1}{231{,}4} \approx 0{,}00432$$

Etape 2 :à la recherche de log(2)

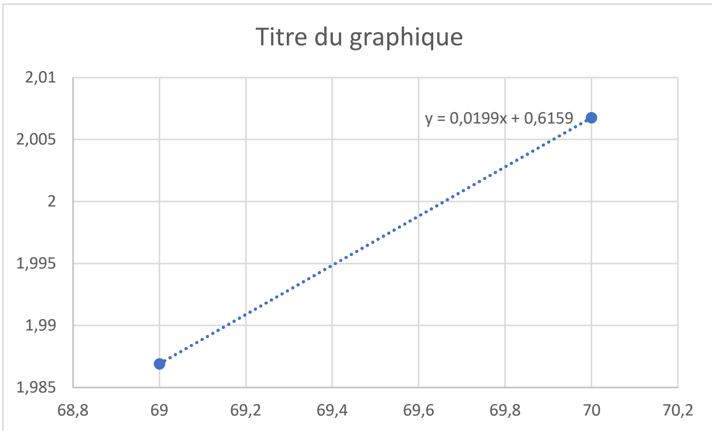
On va donc pouvoir disposer du tableau suivant :

n	a=1,01^n	log(a)
0	1	0
1	1,01	0,00432
2	1,0201	0,00864
3	1,030301	0,01296
4	1,04060401	0,01728
5	1,05101005	0,0216
6	1,06152015	0,02592
7	1,07213535	0,03024
8	1,08285671	0,03456
9	1,09368527	0,03888
10	1,10462213	0,0432
11	1,11566835	0,04752
12	1,12682503	0,05184
13	1,13809328	0,05616
14	1,14947421	0,06048
15	1,16096896	0,0648
16	1,17257864	0,06912
17	1,18430443	0,07344
18	1,19614748	0,07776
19	1,20810895	0,08208
20	1,22019004	0,0864
21	1,23239194	0,09072
22	1,24471586	0,09504
23	1,25716302	0,09936
24	1,26973465	0,10368
25	1,282432	0,108
26	1,29525631	0,11232
27	1,30820888	0,11664
28	1,32129097	0,12096
29	1,33450388	0,12528
68	1,9672222	0,29376
69	1,98689442	0,29808
	2	
70	2,00676337	0,3024

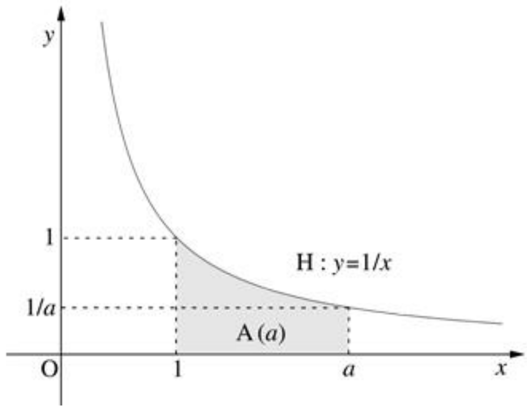
Comment déterminer log(2) ?

On réalise de nouveau une interpolation linéaire. On résout $0{,}0199x + 0{,}6159 = 2$ et on trouve $x \approx 69{,}55$.

$$log(2) = log(1{,}01^{69{,}55}) = 69{,}55 \log(1{,}01)$$
$$= 69{,}55 \times 0{,}00432 \approx 0{,}30$$



Une autre approche :la quadrature de l'hyperbole de Grégoire Saint Vincent en 1647



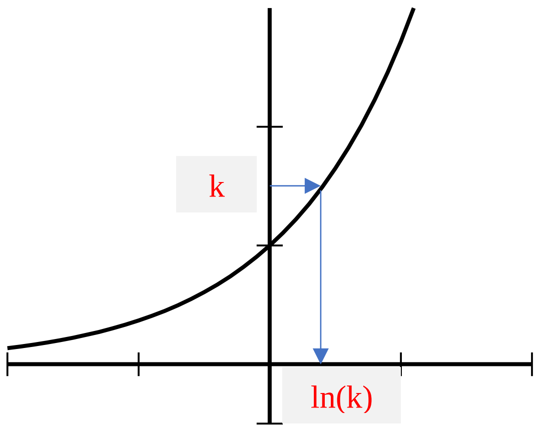
Soit la courbe H représentant la fonction inverse.
Si a est un nombre supérieur ou égal à 1 , on appelle A(a) l'aire du domaine compris entre H l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = a$. On crée ainsi une nouvelle fonction.
A l'aide de la calculatrice, calculer A(2) , A(4) et A(8).
Que remarquez vous ? (indication utiliser le symbole $\int$)
$A(2 \times 4) = A(2) + A(4)$
La fonction A transforme un produit en une somme et l'image de 1 est 0. On obtient les mêmes propriétés algébriques de la fonction vue précédemment.

La fonction inventée par Grégoire Saint Vincent 30 ans après celle inventée par Neper et dans un contexte très différent vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme. Les deux fonctions sont proportionnelles. Cette nouvelle fonction porte le nom de « logarithme népérien » en hommage à qui vous savez… Pour la petite histoire , l'exponentielle a été créée après les logarithmes…
Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction **logarithme décimale,** notée **log**, et définie par : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$; En chimie, la notation pH signifie « potentiel hydrogène ». Le pH permet d'exprimer le caractère basique ou acide d'une solution. Si $[H_3O^+]$ désigne la concentration des ions hydronium dans une solution en $mol.L^{-1}$, on pose : pH = - log $[H_3O^+]$.

I- La fonction logarithme népérien

Vidéo : mathssa.fr/fonctionln

1.Résolution de l'équation $e^x = k$ (k>0)



Propriété :
L'équation $e^x = k$ admet une unique solution

Preuve :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp'(x)		+	
exp(x)=e^x	0	k	$+\infty$

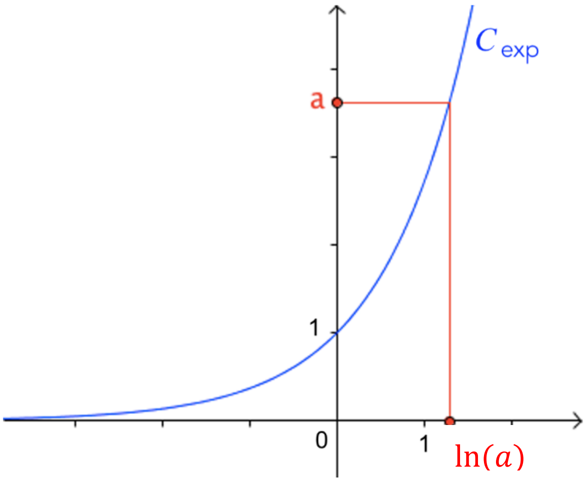
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $k \in]0; +\infty[$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution α.

Conclusion : il existe un unique réel dont l'exponentielle vaut *k.* Ce réel est appelé logarithme népérien de k et est noté ln(k).

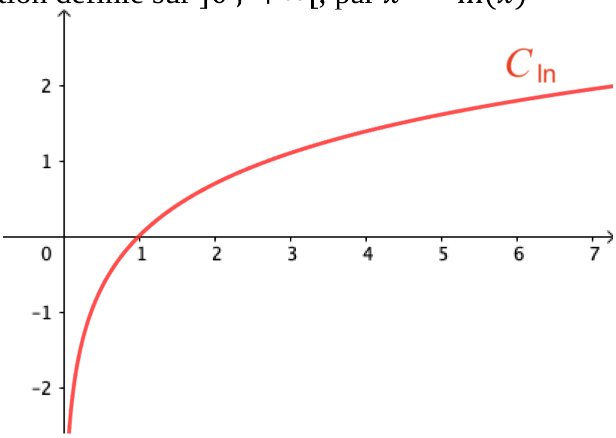
2.Logarithme népérien d'un nombre strictement positif – fonction logarithme népérien

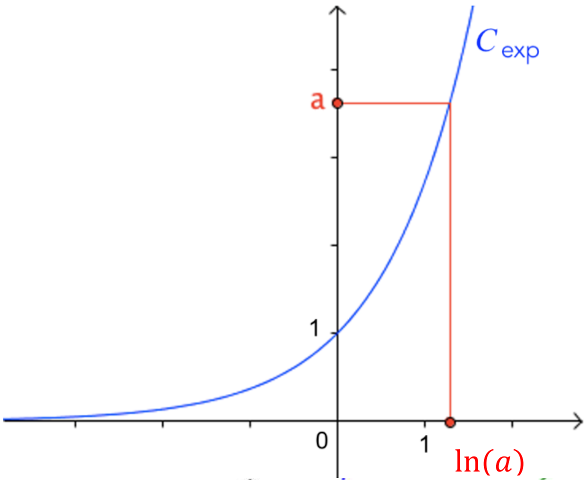
Définitions :

● On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln(a)$.



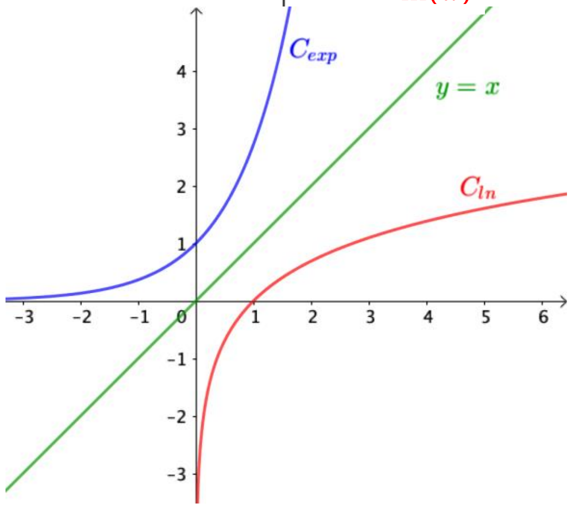
● La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, par $x \longmapsto \ln(x)$





Propriétés :

- $ln(1) = 0\,; ln(e) = 1\,;\ ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Pour tout x réel >0 , $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$
- Pour tout x réel , $\ln(e^x) = x$
- Pour tout x réel >0 , $e^{\ln(x)} = x$



Remarques :

- La fonction ln est définie sur]0 ;+∞[

Pour s'entrainer mathssa.fr/defln

- Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3.Résolution d'équations comportant de l'exponentielle ou du logarithme népérien

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$ b) $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation avec des logarithmes
Vidéo : mathssa.fr/equaln

a) Résoudre l'équation $e^{x+1} = 5$.
b) Résoudre l'équation $\ln(x) = 2$ dans l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$.

Correction
a) $e^{x+1} = 5 \quad \iff \ln(e^{x+1}) = \ln(5)$
$\iff x + 1 = \ln(5)$
$\iff x = \ln(5) - 1$
L'ensemble des solutions de l'équation est S = $\{\ln(5) - 1\}$

b) On résout l'équation dans l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$, car la fonction *ln* est définie pour $x > 0$.
$\ln(x) = 2 \iff e^{\ln(x)} = \mathrm{e}^2$
$\iff x = \ln(2)$
La solution est donc e^2 car elle appartient à l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$.
L'ensemble des solutions de l'équation est S = $\{e^2\}$

Méthode : Résoudre une inéquation avec des logarithmes
Vidéo : mathssa.fr/inequaln

a) Résoudre l'inéquation $e^x + 5 > 4\,e^x$.
b) Résoudre l'inéquation $\ln(6x - 1) \geq 2$.
c) Résoudre dans un intervalle I à déterminer l'inéquation $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$.
d)Un jardinier amateur souhaite désherber une parcelle à l'aide d'un désherbant chimique : le glyphosate. La concentration (relative) de l'herbicide dans le sol au bout de *t* jours est notée *C(t)*. De plus, cette concentration obéit à la loi mathématique suivante : $C(t) = e^{-0{,}0216t}$
On estime que le produit n'est plus nocif pour le jardinier lorsque la concentration est inférieure à 5%. Combien de temps devrait-il attendre avant de jardiner ?

a) $e^x + 5 > 4\,e^x \quad \iff -3e^x > -5$

$\iff e^x < \frac{5}{3}$

$\iff x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est S = $]-\infty; \ln\left(\frac{5}{3}\right)[$

b) Intervalle d'étude :

L'inéquation a un sens si $6x - 1 > 0$ $donc\ si\ 6x > 1\ et\ x > \frac{1}{6}$

Le domaine de définition est donc D=]$\frac{1}{6}$; $+\infty$[

$$\ln(6x-1) \geq 2 \Leftrightarrow e^{\ln(6x-1)} \geq e^2$$

$$\Leftrightarrow 6x - 1 \geq e^2$$

$$\Leftrightarrow 6x \geq e^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{e^2+1}{6}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est S = [$\frac{e^2+1}{6}$; $+\infty$[

c) Intervalle d'étude :

L'inéquation a un sens si $3 - x > 0\ et\ x + 1 > 0\ donc\ si\ x < 3\ et\ x > -1$

Le domaine de définition est donc $D =]-1\,;3[$

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(3-x) \leq \ln(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 3 - x \leq x + 1$$
$$\Leftrightarrow -2x \leq -2$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [1\,;3[$.

d) On résout l'inéquation $e^{-0,0216t} < 0,05$

$$e^{-0,0216t} < 0,05 \Leftrightarrow -0,0216t < \ln(0,05)$$
$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(0,05)}{-0,0216}$$

Au bout de 139 jours, le produit n'est plus nocif.

4.Limites de la fonction logarithme népérien- croissances comparées

Propriétés :
$\lim\limits_{x\to 0+} ln(x) = -\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$

Remarque : la courbe de la fonction ln admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Preuve :
Rappels :

- On dit que la fonction *f* admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme**]*A*;+∞[contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment grand** .
- La fonction *f* a pour limite -∞ en *a* si et seulement **tout intervalle ouvert de la forme**]−∞; *A*[contient tous les réels *f(x)* dès que *x* est **suffisamment proche de *a***

(en + ∞) *On va chercher à utiliser la définition d'un limite égale à + ∞ en +∞ .*

Soit A ∈ ℝ (quelconque) .

$ln\ (x) > A \ \Leftrightarrow x > e^A$

Donc , Pour tout réel A, les réels *ln(x)* deviennent supérieurs à A dès que est **suffisamment grand** .

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

(en 0) *On va chercher à utiliser la définition d'un limite égale à - ∞ en 0 .*

Soit A ∈ ℝ (quelconque) .

$ln\ (x) < A \Leftrightarrow 0 < x < e^A$

Donc pour tout réel A, les réels *ln(x)* deviennent supérieurs à A *x* est **suffisamment proche de *a*** .On a donc $\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$.

<u>Exercice corrigé :</u>Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)$

$x^2 - 2x + 1 = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.Donc, par limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ • $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty.$ $x \longrightarrow x^2 - 2x + 1$ $X \longrightarrow \ln(X)$ $+\infty \qquad + \infty \qquad +\infty$ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = +\infty$	$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \end{cases}$ Donc,par limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + \frac{1}{x^2} = 0^+$ $x \longrightarrow e^x + \frac{1}{x^2}$ $X \longrightarrow \ln(X)$ $-\infty \qquad 0^+ \qquad -\infty$ On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + \frac{1}{x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0+} \ln(X) = -\infty$. Alors comme limite de fonction composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

<u>Propriétés (croissances comparées) :</u>

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$

<u>Démonstration du b. dans les cas où $n = 1$ (au programme) :</u>

Vidéo <u>**mathssa.fr/limxln(x)**</u>

Pour tout $x > 0$, $xln(x) = ln(x)e^{\ln(x)}$. On reconnait un enchainement de fonctions :

$x \longrightarrow \ln(x)$

$X \longrightarrow Xe^X$

$0 \qquad -\infty \qquad 0$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Alors comme limite de fonction composée

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)\, e^{\ln(x)} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$

<u>Remarque :</u> Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

Vidéo mathssa.fr/croissancecompln

Vidéo mathssa.fr/croissancecompln2

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x^2+1)\ln(x)}$

Correction

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " ¥ - ¥ ".

Levons l'indétermination :

$$x-\ln(x) = x(1-\frac{\ln(x)}{x})$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\ln(x)}{x} = 1$.

De plus , $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Et donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x) = +\infty$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{¥}{¥}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0, \text{par croissance comparée.} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln(x)}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 0$ Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 0$

$c)\ \dfrac{1}{(x^2+1)\ln(x)} = \dfrac{1}{x^2\ln(x)+\ln(x)}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0\text{, par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

Donc, comme limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)+\ln(x) = -\infty$

Et donc, comme limite d'un quotient (inverse) : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2\ln(x)+\ln(x)} = 0$

Soit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x^2+1)\ln(x)} = 0$

5.Formules de dérivée :

Propriétés :

- la fonction logarithme népérien est dérivable (donc continue) sur $]0;+\infty[$et pour tout réel x, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

- u est une fonction **strictement positive** et **dérivable** sur un intervalle I.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Soit la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration au programme

on admet que la fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞ [.
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{\ln(x)}$.
Pour tout réel x>0,

- $f = e^u$
- $u(x) = \ln(x)$ $\qquad u'(x) = ln'(x)$
- $f' = u'e^u$
  $f'(x) = ln'(x)e^{\ln(x)}$ $\qquad$ or $f(x) = x$ et donc $f'(x) = 1$

On en déduit que $ln'(x)x = 1$ $\qquad$ soit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice : Dériver des fonctions du type $\ln(u)$

Vidéo mathssa.fr/lndeu

Dériver la fonction f définie sur $]0\,;2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

Correction :
Pour tout réel x de [0 ;2]

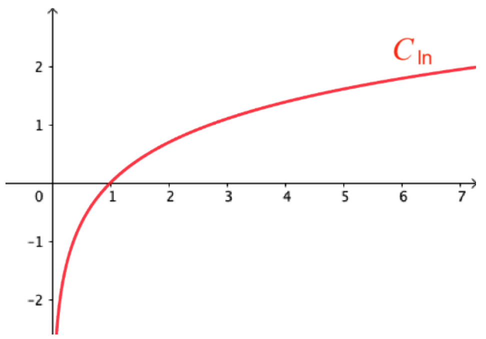
- $f = \ln(u)$
- $u(x) = 2x - x^2$ $\qquad u'(x) = 2 - 2x$
- $f' = \frac{u'}{u}$
  $f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$

6.Tableau de variations et signe de la fonction ln

Propriétés:

- La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

(pour la concavité, $ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ or $-\frac{1}{x^2} < 0 \ldots$)



Remarque : Il est clair que la fonction ln ne garde pas un signe constant.
Elle est strictement négative sur]0 ;1[, strictement positive sur]1 ;+∞[et s'annule en 1.

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))'$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Exercice 1: Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$

Vidéo mathssa.fr/positionln

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Correction

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

$x - 1 > 0\ si\ x > 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1$

g admet un minimum en 1 de valeur $g(1) = 1$.

On en déduit que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) \geq 1$ soit $g(x) > 0$.

soit $x > \ln(x)$.

La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2 : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

Vidéo mathssa.fr/convexiteln

a) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$

b) Étudier la convexité de la fonction f.

Correction

$a)Pour\ tout\ réel\ x > 0, \qquad f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x + 2$

$-x + 2 > 0\ si\ x < 2$

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	$1+2ln(2)$	$\searrow$	

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$

$b)\ Pour\ tout\ réel\ x > 0,$

- $f' = \frac{u}{v}$
- $u(x) = -x + 2 \qquad v(x) = x$
  $u'(x) = -1 \qquad v'(x) = 1$
- $f'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f''(x) = \frac{-x-(-x+2)}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$ Or $-2 < 0\ et\ x^2 > 0$. On en déduit que $f''(x) < 0$.

On en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;+\infty[$

II-Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1. Relation fonctionnelle : logarithme népérien d'un produit

Théorème :
Pour tous réels a et b de $]0\,;+\infty[$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

la fonction logarithme népérien transforme des produits en des sommes

Remarque : Pour tous réels, $\ln(a_1 \times a_2 \ldots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_n)$

Preuve :
soient a et b deux réels de $]0\,;+\infty[$,

- $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$

$e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$

En passant au « logarithme » , on obtient : *ln (ab) =ln(a) + ln(b)*

2. Conséquences

Propriétés :
Pour tous réels a et b de $]0\,;+\infty[$, et pour tout entier relatif n,

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ $\qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$ $\qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Preuve :

- $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(1)$ *soit* $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = 0$. Ainsi $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

- on envisage les trois cas : n>0, n = 0, n<0

1

1er cas :n>0

$\ln(a^n) = \ln(a \times a \times \ldots \times a)$
$= \ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)$
$= n\ln(a)$

2ème cas :n=0

$\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0\ln(a)$

3ème cas :n<0

on va se ramener au 1er cas
Si n<0 alors –n>0
On applique la formule du 1er cas
$\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$
soit $\ln(\frac{1}{a^n}) = -n\ln(a)$
soit $-\ln(a^n) = -n\ln(a)$
soit $\ln(a^n) = n\ln(a)$

- soit $a>0$, $(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln(a)$

d'où $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ soit $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemple : simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $\quad B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$ $\quad C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

Correction

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
$= \ln\left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right)$
$= \ln(9-5) = \ln(4)$

$B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$
$= \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2)$
$= \ln\left(\frac{2^3 \times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$

$C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$
$= 2 - \ln(2) + \ln(e)$
$= 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$

Exercice : résoudre l'équation $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$.

- L'équation a un sens si $x - 3 > 0 \; et \; 9 - x > 0 \; c'est à \; dire \; x > 3 \; et \; x < 9$

Le domaine de définition est donc D=]3 ;9[

- $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$ $\quad \Leftrightarrow \ln\left((x-3)(9-x)\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(9-x) = e^0$

$\Leftrightarrow 9x - x^2 - 27 + 3x = 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$

$a = -1$, $b = 12$, $c = -28$. On calcule le discriminant Δ=32.
Δ>0. On trouve deux solutions $x_1 = \ldots = \frac{-12-\sqrt{32}}{-2} = 6 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \ldots = \frac{-12+\sqrt{32}}{-2} = 6 - \sqrt{2}$

Or x_1 et $x_2 \in D$. L'ensemble des solutions est S={$6+\sqrt{2}; 6-\sqrt{2}$}

3. Résolution d'inéquations du type $q^n < k$

Point méthode : « passer » au logarithme népérien de chaque coté de l'égalité ou de l'inégalité puis isoler progressivement l'inconnue

Exercice corrigé: des recherches de seuil…

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}8^n < 0{,}01$. *Proposer une autre stratégie.*

$0{,}8^n < 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) < \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}8) < \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \quad car \quad ln(0{,}8) < 0 \quad (0{,}8 < 1\ donc\ ln(0{,}8) < ln(1))$

$\Leftrightarrow n \geq 21 \qquad \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}64$

Le seuil à partir duquel $0{,}8^n < 0{,}01$ est 21.

Autre méthode : un programme

```
n = 0
u = 1
while u < 0.01 :
    n = n + 1
    u = 0,8**n
return(n)
```

2. On place un capital de 100 000 euros à un taux annuel de 6%.
Soit u_n le capital obtenu au bout de n années.
a)Exprimer u_n en fonction de n

Augmenter de 6% revient à multiplier par 1,06.
Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}06 \times u_n$
La suite (u_n) est donc géométrique de 1^er^ terme $u_0 = 100\,000$ et de raison $q = 1{,}06$.
Ainsi pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n = 100\,000 \times 1{,}06^n$

b)Au bout de combien de temps le capital aura-t-il doublé ? triplé ?

On résout l'inéquation $u_n \geq 200\,000$ soit $100\,000 \times 1{,}06^n \geq 200\,000$

$100\,000 \times 1{,}06^n \geq 200\,000 \Leftrightarrow 1{,}06^n \geq 2$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}06^n) \geq \ln(2)$

$\Leftrightarrow n\ln(1{,}06) \geq \ln(2)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)}\ car\ ln(1{,}06) > 0\ (1{,}06 > 1\ donc\ ln(1{,}06) > ln(1))$

$\Leftrightarrow n \geq 12 \qquad \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)} \approx 11{,}89$

Il faut attendre 12 années afin de doubler le capital et 19 ans afin de le tripler.

4.Logarithme décimal

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par :$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

En chimie, la notation pH signifie « potentiel hydrogène ». Le pH permet d'exprimer le caractère basique ou acide d'une solution. Si $[H_3O^+]$ désigne la concentration des ions hydronium dans une solution en $mol.L^{-1}$, on pose : pH = - log $[H_3O^+]$.

Propriétés algébriques :toutes les propriétés algébriques de ln s'appliquent
$\log(10) = 1$ et pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/calculslog