CHAPITRE 5 : dénombrement et loi binomiale

I-Dénombrement : principe additif et principe multiplicatif
Vidéos : mathssa.fr/combinatoire et mathssa.fr/combinatoire2

1.Notion de dénombrement

Définitions :
● Un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
● Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
● **Dénombrer**, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemples :
● L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $Card(E) = 11$.
● L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints**, s'ils n'ont aucun élément en commun.

2.Principe additif

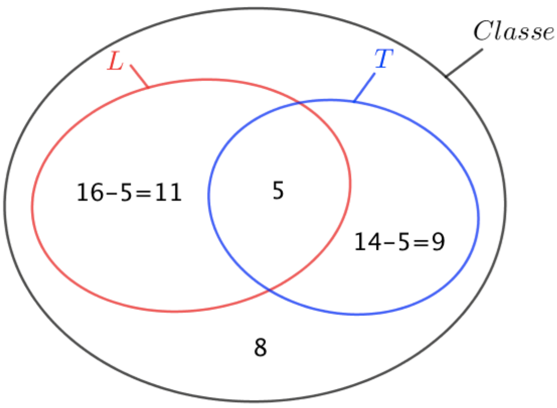
Propriété (principe additif) : Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints.
Alors $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = Card(E_1) + Card(E_2) + \dots + Card(E_p)$

Exemple :
Soit $E_1 = \{a\,; b\,; c\,; d\}$ et $E_2 = \{\alpha\,; \beta\,; \gamma\}$
Alors E_1 et E_2 sont disjoints et on a :
$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme   vidéo :mathssa.fr/diagramme.html

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Correction
Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre.
On a alors : $Card(L) = 16$
$Card(T) = 14$
$Card(L \cap T) = 5$
$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$
On ne peut pas utiliser le principe additif car les ensembles L et T ne sont pas disjoints.
On schématise alors la situation à l'aide d'un diagramme :



On en déduit le nombre d'élèves de la classe en utilisant le principe additif sur des ensembles disjoints, soit : $11 + 5 + 9 + 8 = 33$.

3.Principe multiplicatif

Exemple :
On considère les 3 ensembles suivants :
$E_1 = \{renard\ roux, renard\ noir, renard\ blanc\}$
$E_2 = \{femme\ rousse, femme\ brune, femme\ blonde\}$
$E_3 = \{robe\ rouge, robe\ noire, robe\ blanche\}$

Les femmes choisissent une robe et un renard de façon aléatoire.
On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de E_1, d'un élément de E_2 et d'un élément de E_3.

La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :
$(renard\ blanc, femme\ brune, robe\ rouge)$
$(renard\ roux, femme\ blonde, robe\ noire)$
$(renard\ noir, femme\ rousse, robe\ blanche)$

Intuitivement, on peut penser qu'il existe $3 \times 3 \times 3$

Définitions : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.

-On appelle p-uplet une liste ordonnée de p éléments.
-Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des ***p*-uplets** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ … $a_p \in E_p$.

Propriété (principe multiplicatif) : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$. Alors on a :
$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card(E_p)$$

Méthode : Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

Vidéo mathssa.fr/combinatoire3

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Correction
a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
On considère alors les triplets de la forme (entrée, plat, dessert) éléments de $E \times P \times D$.
D'après le principe multiplicatif, on a :
$Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Il existe 24 menus différents.

b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12$

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

II-Dénombrement : k-uplets et permutations

1. Dénombrement des k-uplets

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments peuvent se répéter.** ⚠

Exemple :
Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$.

On lance par exemple deux dés à six faces. On note $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.
Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles correspondants aux résultats du lancer de deux dés. On a par exemple :

$$(1, 2) \in E^2$$
$$(6, 3) \in E^2$$
$$(5, 5) \in E^2$$

D'après le principe multiplicatif, il existe $6 \times 6 = 6^2$ couples possibles.

Propriété : Soit un ensemble fini E à n éléments.
Alors le nombre de k-uplets est égal à :$Card(E^k) = n^k$

Vidéo mathssa.fr/combinatoire4

2.Dénombrement des k-uplets d'éléments distincts

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.** ⚠

Exemple :
On considère l'ensemble $E = \{a ; b ; o ; p ; r\}$.

- (b, o, a) et (r, a, p) sont des triplets d'éléments distincts de E.
- (b, a, r, b, a, r) n'est pas un 6-uplet d'éléments distincts de E car des éléments se répètent.
- (p, r, o, b, a) est un 5-uplet différent de (b, a, p, r, o). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

Calculons par exemple le nombre de triplets d'éléments distincts de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de triplets d'éléments distincts de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et $k \leq n$.
Un **k-uplets d'éléments distincts** de E est un k-uplet pour lequel tous les éléments sont différents.
Un k-uplets d'éléments distincts est également appelé **arrangement** de k éléments parmi n.

Définition : On appelle **factorielle n** le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Remarque : $n!$ se lit « factorielle n ».

Exemples :
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 99 \times 100$
$1! = 1$
$0! = 1$ par convention

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Méthode : Dénombrer des k-uplets d'éléments distincts (arrangements)

Vidéo : mathssa.fr/combinatoire5 et mathssa.fr/combinatoire6

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil.

Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.
Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement.
Correction

Fred doit choisir 3 positions parmi 12. L'ordre a une importance, on voit que les prises sont de différentes couleurs.
Il existe 12 positions possibles pour la 1ère prise. Celle-ci étant fixée, il existe alors 11 positions pour la 2e et ainsi 10 positions pour la 3e prise.
En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de postions possibles est égal à :
$12 \times 11 \times 10 = 1320$.

On peut également considérer les triplets d'éléments distinct (arrangements de 3 éléments parmi 12), soit :

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = \frac{1 \times 2 \times \ldots 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = 10 \times 11 \times 12 = 1320$$

Parmi les 1320 positions, une seule est la bonne. La probabilité que Fred retrouve le bon branchement est égal à : $\frac{1}{1320}$.

3.Dénombrement des permutations

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.** ⚠

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
$(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des 5-uplets qui utilisent tous les éléments de E.
On les appelle des permutations de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un n-uplet éléments distincts de E.

Remarque : Une permutation d'un ensemble à n élément est un n-uplet d'un ensemble à n éléments. Pour une permutation, on a $k = n$.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple :
Il existe $3! = 6$ façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

Méthode : Dénombrer des permutations

Vidéo :mathssa.fr/combinatoire7

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.

C'est le moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.
- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

Correction

- Proposition des mathématiciens :

Le nombre de façons de placer ces 12 scientifiques est égal au nombre de permutations dans un ensemble à 12 éléments, soit :
$12! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 11 \times 12 = 479\,001\,600$.

- Proposition des physiciens :

Le groupe des physiciens est composé de 3 personnes. Vu qu'ils souhaitent s'assoir côte à côte, le groupe dispose de 10 positions possibles :
Les places 1-2-3 ou 2-3-4 ou 3-4-5 ou … ou 10-11-12.
Au sein du groupe des physiciens, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments, soit : $3! = 6$.
Au sein du groupe formé par les autres scientifiques, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à $12 - 3 = 9$ éléments, soit : $9! = 362\,880$.
Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s'assoir selon les physiciens est égal à : $10 \times 6 \times 362\,880 = 21\,772\,800$.

- Proposition des biologistes :

Le nombre d'ordres possibles pour placer le groupe des femmes et des hommes est égal à 2 : hommes-femmes ou femmes-hommes.
Au sein du groupe des femmes, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments, soit : $6! = 720$.
De même pour le groupe des hommes : $6! = 720$.
Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s'assoir selon les biologistes est égal à : $2 \times 720 \times 720 = 1\,036\,800$.

III-Dénombrement : combinaisons

1. Nombre de combinaisons

⚠ Ici, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas. ⚠

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2 ; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1 ; 2\}$ et $\{2 ; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et $k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est un sous-ensemble à k éléments de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Méthode : Dénombrer des combinaisons

Vidéo :mathssa.fr/combinatoire8

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Correction

a) On compte le nombre de combinaisons de 4 élèves parmi $18 + 16 = 34$ élèves, soit :

$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!\,(34-4)!} = \frac{34!}{4!\,30!} = \frac{31 \times 32 \times 33 \times 34}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46376$$

b) On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.
Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit le nombre de combinaisons de 2 élèves parmi 32 élèves, soit encore :

$$\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!\,(32-2)!} = \frac{32!}{2!\,30!} = \frac{31 \times 32}{1 \times 2} = 496$$

Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à $46376 - 496 = 45880$.

2.Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de k parmi n porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$. Celle-ci sera étudiée dans le chapitre « Variables aléatoires ».

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Propriété du triangle de Pascal : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/combinatoire9

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} + \frac{n!}{k!\,(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(k+1)(n-k-1)!\,(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Méthode : Calculer des coefficients binomiaux

Calculer : a) $\binom{25}{24}$ b) $\binom{4}{2}$

Correction

a) $\binom{25}{24} = \binom{25}{25-24}$ par symétrie

$= \binom{25}{1}$

$= 25.$

b) $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ d'après la propriété du triangle de Pascal

$= 3 + \binom{3}{2}$

$= 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ d'après la propriété du triangle de Pascal

$= 3 + 2 + 1 = 6$

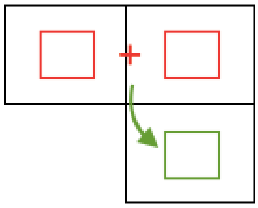
Avec la calculatrice : aller dans maths , Proba et combinaison .Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit :

25***combinaison***24 ou 25***nCr***24

3.Le triangle de Pascal

Vidéo : mathssa.fr/combinatoire10

Le grand tableau qui suit s'appelle le triangle de Pascal.
Il se complète de proche en proche de la manière ci-contre :



On a, par exemple, dans le tableau : 10 + 5 = 15

Le triangle de Pascal peut être utilisé pour lire rapidement les coef
Par exemple, pour $n = 4$ et $k = 2$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6$.

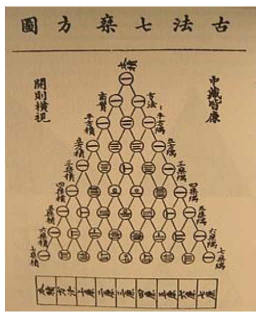
k / n	0	1	**2**	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2} = 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On retrouve la propriété du triangle de Pascal : $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$

$= \binom{6}{4}$

Remarque : le triangle de Pascal sert à développer $(a+b)^n$

Exemple : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
On retrouve les puissances successives de a et b (puissances décroissantes pour a et croissantes pour b) multipliées par un coefficient binomial
Ainsi : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$



Blaise Pascal (1623 ; 1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui "triangle de Pascal". Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie* (XIIe siècle).
Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).

4.Parties d'un ensemble

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

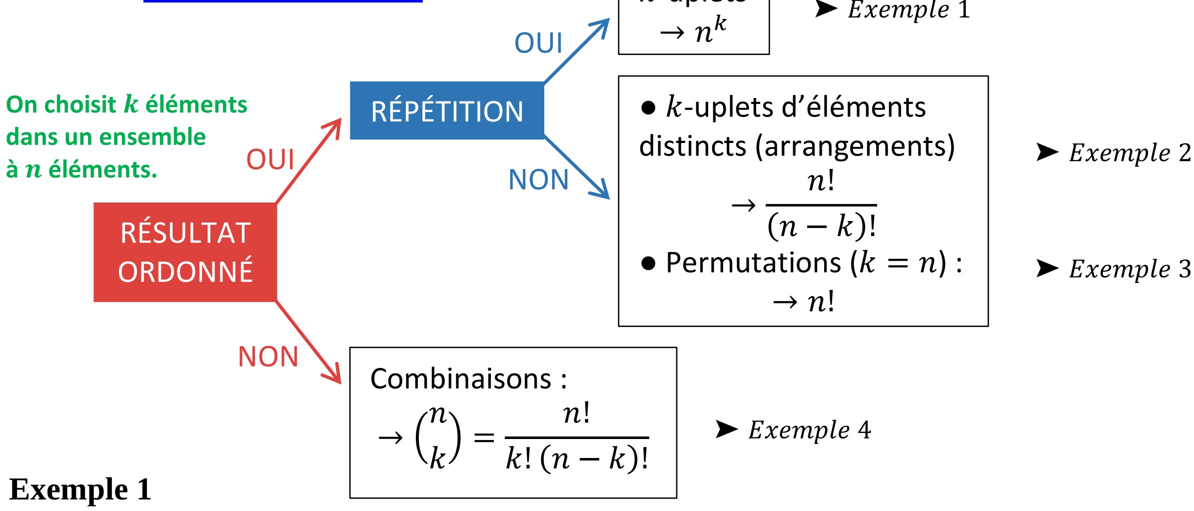
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration au programme :
Vidéo mathssa.fr/combinatoire11

- Le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à n éléments. Soit : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

- Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où à chaque élément de E, on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l'inclure dans le sous-ensemble.Il y a donc deux possibilités par étape et il y a n étapes.
Il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n facteurs) possibilités d'obtenir un sous-ensemble de E, soit 2^n.

Exemple : Soit : $E = \{1, 2, 3\}$. Alors toutes les parties de E sont :
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.
Elles sont au nombre de 8. En effet, ici $n = 3$ et $2^3 = 8$.
Pour résumer : Arrangement, permutation, combinaison... : lequel choisir ?
Vidéo mathssa.fr/combinatoire



Exemple 1
Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet ?
ORDONNÉ - RÉPÉTITION
→ Nombre de triplet d'un ensemble à 26 éléments = 26^3.

Exemple 2
Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet toutes différentes ?
ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de triplets d'éléments tous distincts (arrangements) d'un ensemble à 26 éléments = $26 \times 25 \times 24$.

Exemple 3
Nombre d'anagrammes du mot « MDR ».
ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de permutations à 3 éléments = $3!$

Exemple 4
Nombre de possibilités de tirer simultanément 3 jetons parmi 6 jetons marqués de 6 lettres toutes différentes.
NON ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de combinaisons à 3 éléments parmi 6 = $\binom{6}{3}$.
Entrainement : mathssa.fr/combi

IV-Loi binomiale

vidéo : mathssa.fr/binomiale

1. Epreuve de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :
1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face".
2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition : Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.
p est le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemples : Dans les exemples présentés plus haut :

$$1)\ p = \frac{1}{2} \qquad\qquad 2)\ p = \frac{1}{6}$$

Convention :
Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1 - p)$$

Démonstrations :

- $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0)$
$= 1 \times p + 0 \times (1 - p)$
$= p$
- $V(X) = (1 - E(X))^2 \times P(X = 1) + (0 - E(X))^2 \times P(X = 0)$
$= (1 - p)^2 \times p + (0 - p)^2 \times (1 - p)$
$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3$
$= p - p^2$
$= p(1 - p)$

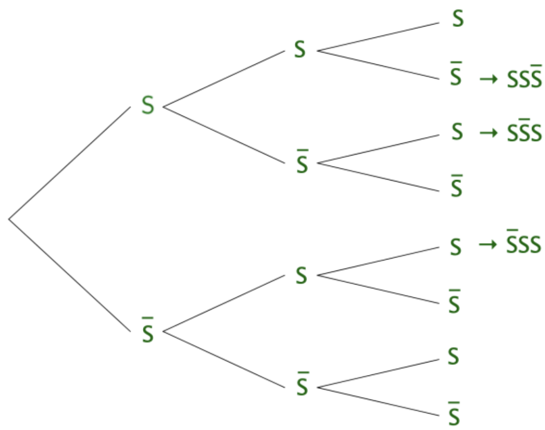
2. Schéma de Bernoulli – loi binomiale

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

<u>Exemple :</u> La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et $p = \frac{1}{2}$.

<u>Exemple :</u>

On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.
Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ?
On compte le nombre de combinaisons de 2 succès parmi 3, soit : $\binom{3}{2} = 3$.



<u>Définition :</u>
On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et schématisé sous la forme d'un arbre pondéré.
Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves est le coefficient binomial : $\binom{n}{k}$.

<u>Définition :</u>
La variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** dans un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p** suit la **loi binomiale** de **paramètres n** et **p** et est notée *B(n ;p).*

<u>Propriété :</u>
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

<u>Démonstration au programme :</u>
Vidéo mathssza.fr/binomiale2
Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n - k$ échecs (de probabilité $1 - p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.
Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$.
Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Exemple : Calculer les probabilités d'une loi binomiale **Vidéo** mathssa.fr/binom

Une maladie affecte la population de canards d'une région du sud-ouest de la France. Elle touche 0,5% des canards. On choisit au hasard 100 canards. La population est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 canards.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de canards malades.
1.Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2.Déterminer la probabilité qu'exactement 2 canards soient malades. (on écrira une formule avant de passer au calcul)
3.Donner la probabilité qu'au plus 2 canards soient malades.
4.Un vétérinaire estime qu'il y a à peu près 40% de chances qu'au moins un canard soit malade dans un échantillon de 100 canards. Qu'en pensez-vous ?

Correction
1 .On répète 100 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve à deux issues : le canard est malade (succès) ; le canard est sain (échec).La **probabilité du succès** est égale à $0{,}005$.

Cette expérience est un **schéma de Bernoulli de paramètres $\boldsymbol{n} = 100$ et $\boldsymbol{p} = 0,005$.**
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 100$ et $p = 0{,}005 \;\; soit \; B(100; 0{,}005)$

2\.

Nombre de combinaisons de 2 succès parmi 100

Probabilités des 2 succès.

Probabilités des $100 - 2 = 98$ échecs.

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} 0{,}005^2 (1 - 0{,}005)^{100-2}$$
$$= 4\,950 \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{98} \approx 0{,}076$$

Vérification sur la calculatrice: menu distrib puis choisir binomFdp(100,0.005,2).

La probabilité qu'exactement 2 canards soient malades est de 0,076.

3\. $P(X \leq 2) \; = binomFrep(100{,}0.005{,}2) \; \approx 0{,}986$
La probabilité qu'au plus 2 canards soient malades est de 0,986.

4\. $P(X \geq 1) \; = \; 1 - \; P(X = 0) \; = \; 1 - \; \binom{100}{0} 0{,}005^0 (1 - 0{,}005)^{100} = 1 - 0{,}995^{100} \approx 0{,}394$

Il y a à peu près 40% de chances qu'au moins un canard soit malade dans un échantillon de 100 canards.
L'affirmation est donc vraie.

La loi binomiale avec la calculatrice : mathssa.fr/binomiale3

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

<u>Exemple :</u> calculer de l'espérance , variance et écart-type
Vidéos : mathssa.fr/binom2 et mathssa.fr/binom3
Une maladie affecte la population de canards d'une région du sud-ouest de la France. Elle touche 5% des canards. On choisit au hasard 100 canards. La population est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 canards.
On appelle S la variable aléatoire qui compte le nombre de canards malades.
On admet que la variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}05$ et $n = 100$. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$

Correction
La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}05$ et $n = 100$.
$E(S) = 0{,}05 \times 100 = 5$, $V(S) = 100 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 4{,}75$, $\sigma(S) = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$
En moyenne, sur un échantillon de 100 canards, on peut espérer avoir 5 canards malades.

<u>Méthode :</u> Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à ou supérieure à une valeur donnée

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.
Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.
a) Déterminer des réels a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$
b) Donner une interprétation du résultat précédent.

Correction
a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0{,}55$.

Avec le tableur, il est possible d'obtenir la loi de probabilité de X.

Avec la loi binomiale $B(50 ; 0{,}55)$:
Pour calculer $P(X = 20)$, il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;0)
Pour calculer $P(X \leq 20)$, il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;1)

C2 =LOI.BINOMIALE(A2;50;0,55;1)

	A	B	C	D	E
1	k	P(X=k)	P(X<=k)		
2	0	4,6E-018	4,6E-018		
3	1	2,8E-016	2,8E-016		
4	2	8,4E-015	8,7E-015		
5	3	1,6E-013	1,7E-013		
6	4	2,4E-012	2,5E-012		
	…	…	…		

On obtient ainsi :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$P(X=k)$	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,034	0,05	0,069	0,087	0,102	0,112

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$P(X=k)$	0,112	0,104	0,089	0,07	0,051	,034	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001

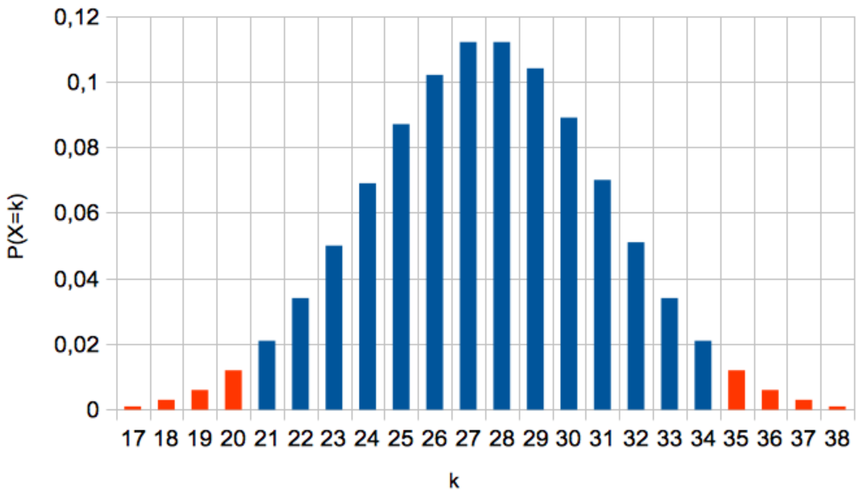
Pour $k < 17$ et $k > 38$, les probabilités sont inférieures à 10^{-3} et peuvent être considérées comme négligeables.

On obtient également le tableau des probabilités cumulées :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$P(X=k)$	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$P(X=k)$	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

On cherche a et b tel que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.
On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$.
On lit : $a = 21$.
On détermine ensuite b, le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.
On lit : $b = 34$.



Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0{,}95$

b) Or, $\frac{21}{50}$ = 42 % et $\frac{34}{50}$ = 68 %.
Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

A noter : L'intervalle [0,42 ; 0,68] s'appelle **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.