**CHAPITRE 7 – Orthogonalité dans l’espace**

**Tout le cours en vidéo : mathssa.fr/produitscalesp et mathssa.fr/produitscalesp2**

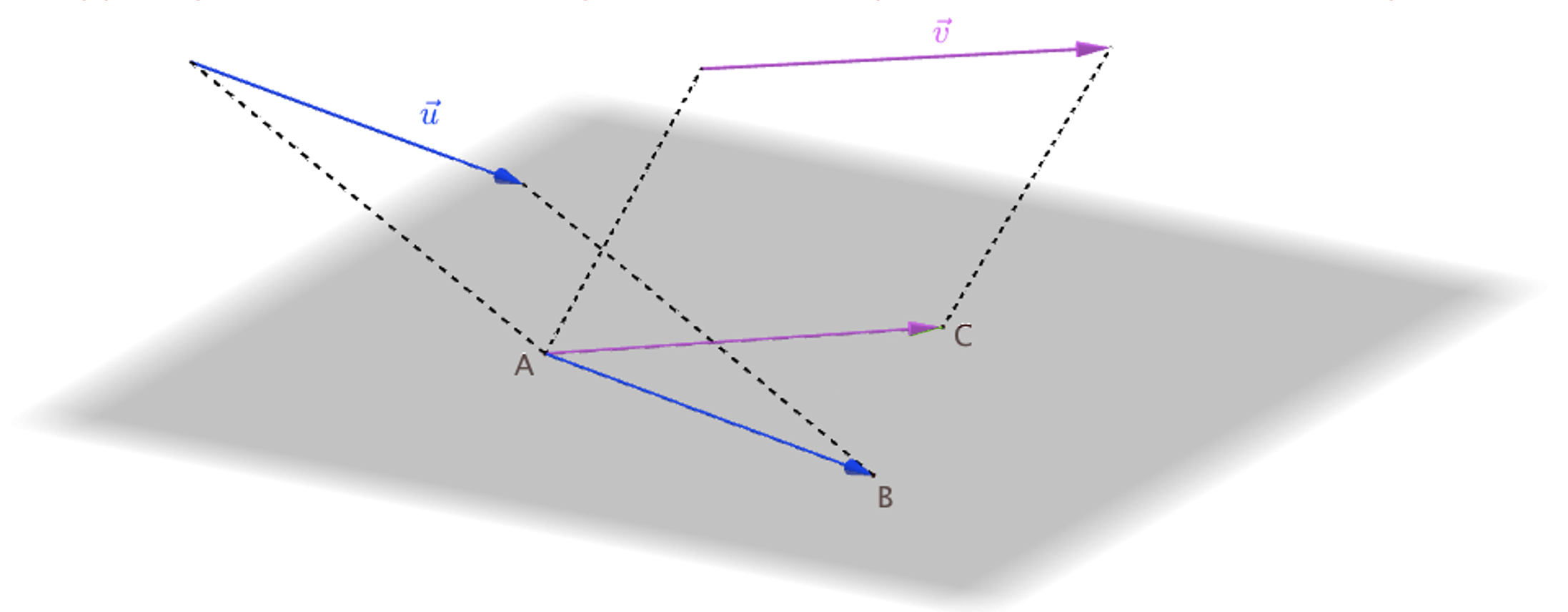
**I-Produit scalaire de deux vecteurs de l’espace**

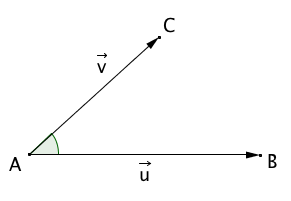
**1.Définition et propriétés**

Définition : Soit et deux vecteurs de l'espace. , et trois points tels que et

. Il existe un plan contenant les points , et .

On appelle **produit scalaire de l'espace** de et le produit dans le plan .



**On retrouve alors dans l’espace toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan :** 1ère formule du produit scalaire:

Soit et deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de par , noté , le

nombre réel défini par :

- , si l'un des deux vecteurs et est nul

- , dans le cas contraire.

Cas particuliers :

* Si et sont deux représentants des vecteurs non nuls et alors :

Si et sont des vecteurs colinéaires de même sens ,

* Si et sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,



se note aussi et est appelé carré scalaire de .

**Propriété de symétrie :** Pour tout vecteur et , on a :

**Propriétés de bilinéarité :** Pour tous vecteurs, et , on a :

1)

2) , avec *k* un nombre réel.

**Propriétés (identités remarquables):** Pour tous vecteurs et , on a :

1)

2)

3)

**Formules de polarisation :** Soit et deux vecteurs. On a :

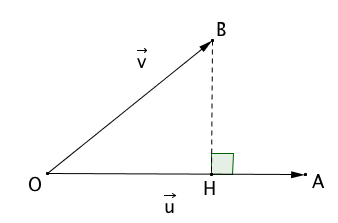
Et

**2ème formule du produit scalaire:**

Soit A, B et C trois points du plan. On a :

**Propriété :**

Les vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si .

**3ème formule du produit scalaire :**

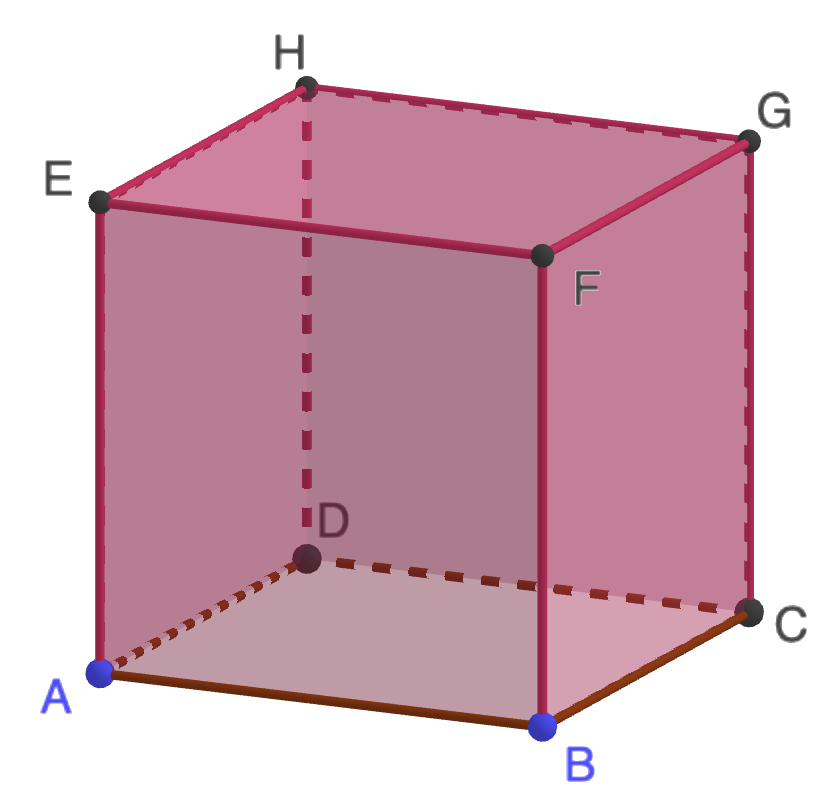
Soit et deux vecteurs non nuls

du plan tels que et .

H est le projeté orthogonal du point B sur la

droite (OA).

On a :



Méthode : Calculer le produit scalaire dans l’espace

est un cube d'arête .

Calculer les produits scalaires :

a) b) c)

**Correction**

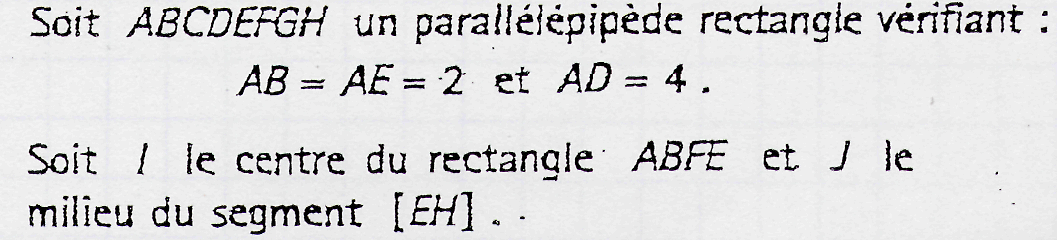
a)

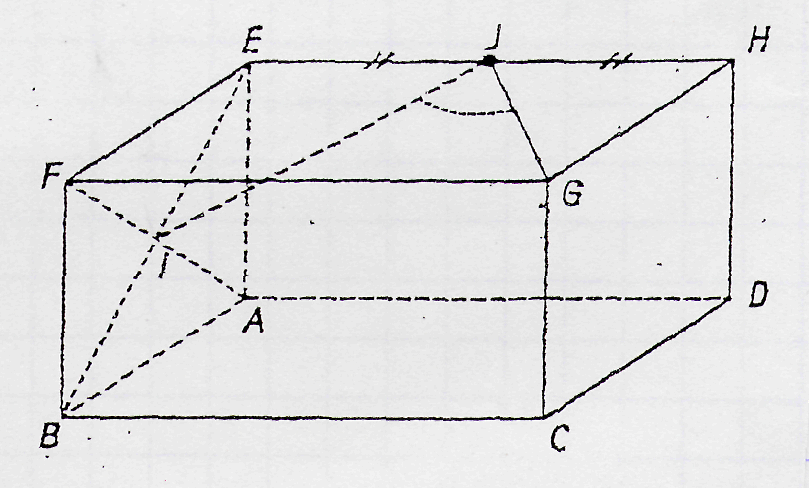
, étant le projeté orthogonal de sur ().

b) car et sont orthogonaux.

c)

**Exercice 2 :**

****

****

Déterminer la valeur de .

**2.Produit scalaire dans un repère orthonormé**

Définitions :

● Une base de l’espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs et sont deux à deux orthogonaux,

- les vecteurs et sont unitaires, soit :, et

● Un repère de l’espace est **orthonormé,** si sa base est orthonormée**.**

**4ème formule du produit scalaire**

Propriétés : Dans un repère orthonormé de l’espace  :

● Soit et deux vecteurs de l'espace.

et .

● Soit et deux points de l’espace.

Démonstration :

●

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple :

, et

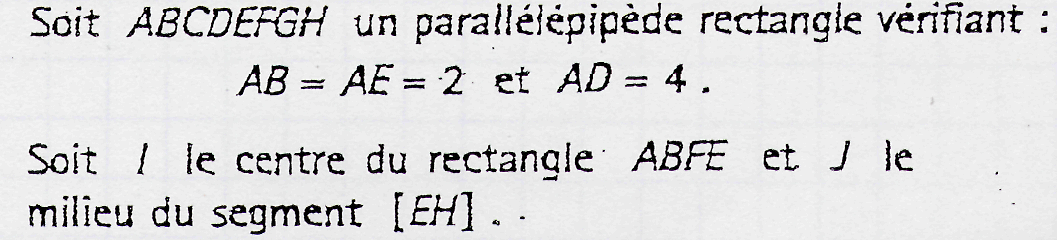
● On a, en particulier : .

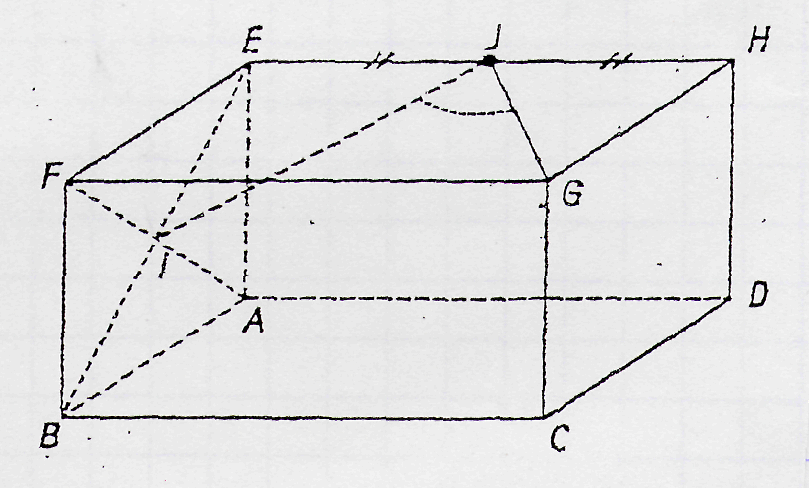
● Et :

Application :

Dans un repère orthonormé de l’espace  , on donne les trois points . Déterminer .

**Exercice corrigé : calcul d’angle dans l’espace**

****

****

* 1. En utilisant le repère orthonormal () , donner les coordonnées de tous les points
  2. Déterminer la valeur de .
  3. Déterminer, à 0,1° près , la mesure de l’angle géométrique

1. Dans le repère orthonormal () :

) soit I est le centre de ABFE donc le milieu de [AF]

) soit J est le milieu de [EH]

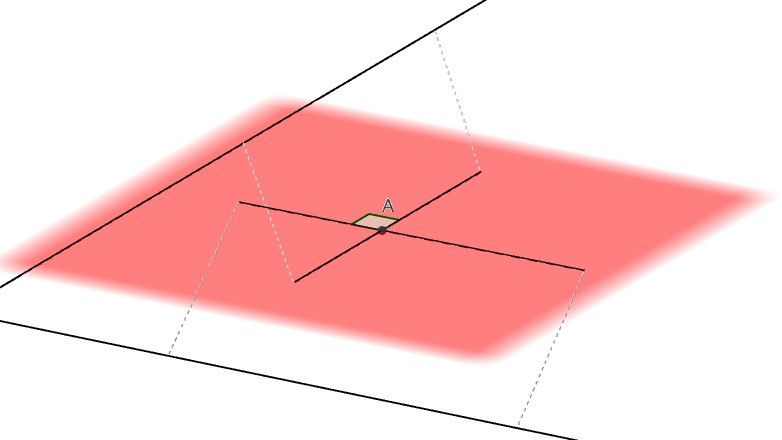
2.

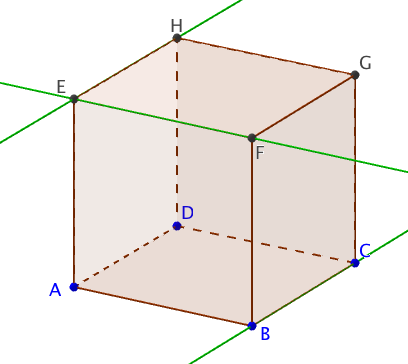
On a soit

**II-Orthogonalité dans l’espace**

**1. Orthogonalité de deux droites**

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.





Exemple :

est un cube.

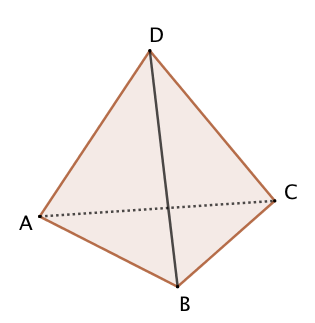
- Les droites () et () sont perpendiculaires.

- Les droites () et () sont orthogonales.

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

**Exercice 1 :**Soit un tétraèdre régulier d’arêtes de longueur .

Démontrer que les arêtes [] et [] sont orthogonales.

**Correction**

On va prouver que .

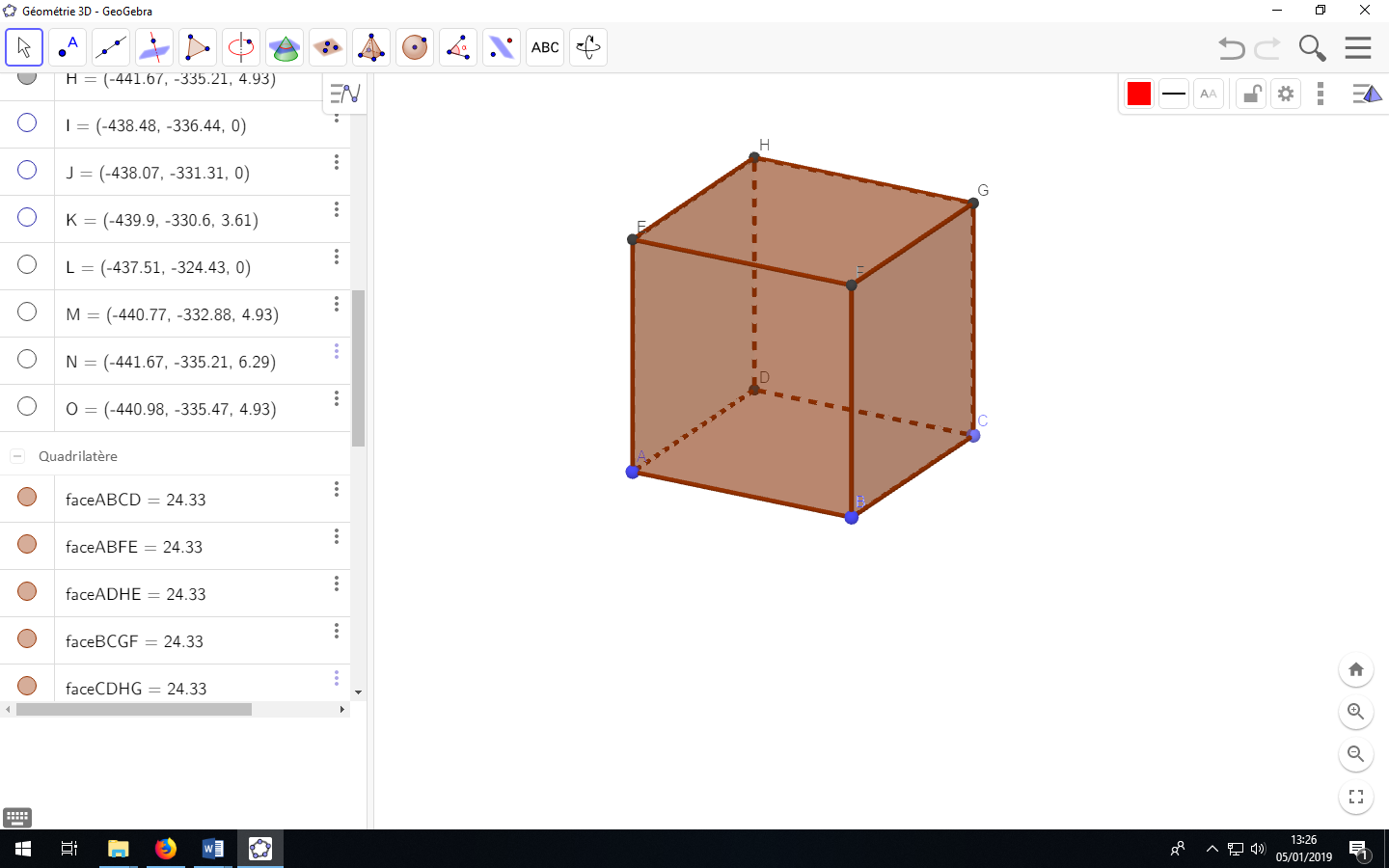
Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

On démontre de même dans le triangle équilatéral que :

Ainsi :

Les vecteurs et sont donc orthogonaux, et donc

Les arêtes [] et [] sont orthogonales.

**Exercice 2:**

ABCDEFGH est un cube de coté a . Le point I est le centre de la face DCGH et J est le milieu du segment [AD]. Dans un repère bien choisi, donner les coordonnées des points A,I,B et J.

Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont orthogonales.

Dans le repère orthonormé () :

On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux et donc que les droites (AI) et (BJ) sont orthogonales.

**2.Orthogonalité d'une droite et d'un plan**

Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de .

Une image contenant ligne, diagramme, conception, origami

Description générée automatiquement

Propriété : Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de .

Démonstration :

Soit une droite de vecteur directeur orthogonale à deux droites sécanteset de . Soit et des vecteurs directeurs respectifs de et .

Alors et sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur .

Soit une droite quelconque de de vecteur directeur.

Démontrons que est orthogonale à .

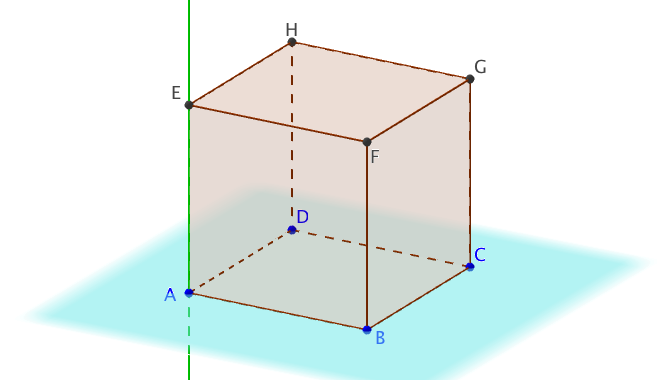
peut se décomposer en fonction de et qui constituent une base de (car non colinéaires).

Il existe donc deux réels et tels que .

Donc , car est orthogonal avec et

Donc est orthogonal au vecteur .

Et donc est orthogonale à .



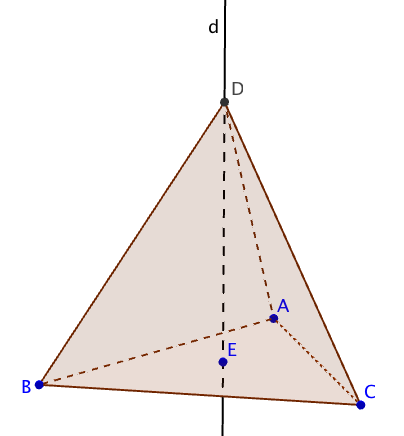
Exemple :

est un cube.

() est perpendiculaire aux droites () et ().

() et () sont sécantes et définissent le plan ().

Donc () est orthogonal au plan ().



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

**Vidéo** mathssa.fr/orthodroiteplan

est un triangle équilatéral. est le point d'intersection de ses hauteurs.

La droite passant par est orthogonale au plan ().

La pyramide est telle que soit un point de la droite .

Démontrer que les droites () et () sont orthogonales.

**Correction :**

La droite est orthogonale au plan ().

La droite est donc orthogonale à toutes les droites du plan ().

Comme la droite () appartient au plan (), la droite est orthogonale à la droite ().

Par ailleurs, la droite () est perpendiculaire à la droite ().

Ainsi, () est orthogonale à deux droites sécantes du plan () : () et .

Donc () est orthogonale au plan ().

Et donc la droite () est orthogonale à toutes les droites du plan ().

La droite () appartient au plan () donc la droite () est orthogonale à la droite ().

**3.Projections orthogonales**

Définitions :

● Soit un point et une droite de l’espace.

Le **projeté orthogonal du point sur la droite**  est le point appartenant à tel que la droite () soit perpendiculaire à la droite .

Une image contenant ligne, antenne

Description générée automatiquement

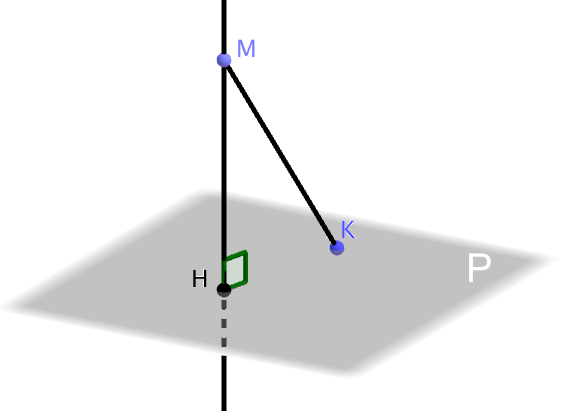
● Soit un point et un plan de l’espace.

Le **projeté orthogonal du point sur le plan**  est le point appartenant à tel que la droite () soit orthogonale au plan .

Une image contenant capture d’écran, ligne, diagramme, conception

Description générée automatiquement

Propriété : Le projeté orthogonal d’un point sur un plan est le point de le plus proche de .

Démonstration au programme :

**Vidéo** **[mathssa.fr/projeteortho](https://youtu.be/c7mxA0TbVFU)**

Soit le projeté orthogonal du point sur le

plan *P*.

Supposons qu’il existe un point du plan *P* plus

proche de que l’est le point .

car est le point de la droite le plus

proche de .

Donc .

Or, () est orthogonale à *P*, donc () est orthogonale à toute droite de *P*.

En particulier, () est perpendiculaire à ().

Le triangle est donc rectangle en .

D’après l’égalité de Pythagore, on a :

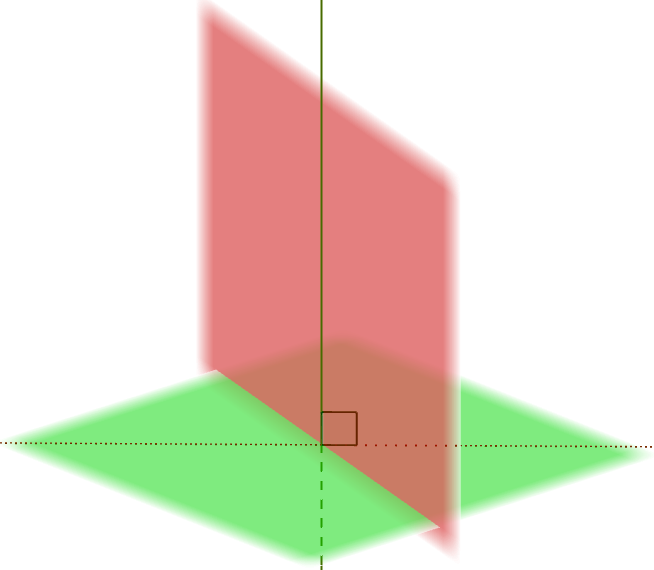
Donc .

Donc . Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point est le point .

On en déduit que est le point du plan le plus proche du point .

**4.Orthogonalité de deux plans**

**Propriété :** Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.



**5.Vecteur normal à un plan**

**Définition :** Un vecteur non nul de l'espace est **normal** à un plan si est un vecteur directeur d’une droite orthogonale au plan .

Une image contenant capture d’écran, conception

Description générée automatiquement

**Propriété :** Un vecteur non nul de l'espace est normal à un plan *,* s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de .

Une image contenant ligne, diagramme, conception

Description générée automatiquement

**Propriété :** Soit un point et un vecteur non nul de l’espace.

L’ensemble des points tels que  est le plan passant par et de vecteur normal .

Une image contenant conception

Description générée automatiquement

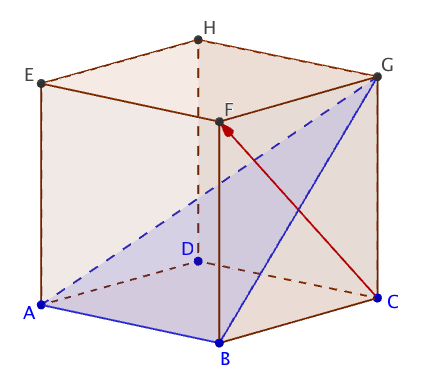
**Remarque :** la réciproque est bien entendu vraie



Au XIXe siècle, le vecteur normal , appelé produit vectoriel, est noté ⋀.

Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aAnz\_cP72Q4**](https://youtu.be/aAnz_cP72Q4)

est un cube.

Démontrer que le vecteur est normal au plan ().

**Correction**

On considère le repère orthonormé .

Dans ce repère : ,,,,.

On a ainsi :

, et , donc :

Donc est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (), il est donc normal à ().

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, on donne : , et .

Démontrer que un vecteur normal au plan ().

**Correction**

On a : et .

et ne sont pas colinéaires car il n’existe pas de réel k tel que (il n’existe pas de réel k tel que )

Donc est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (), il est donc normal à ().

**III-Equation cartésienne d’un plan -application**

Vidéo : mathssa.fr/espace5

**1.Equation cartésienne d’un plan dans l’espace**

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé .

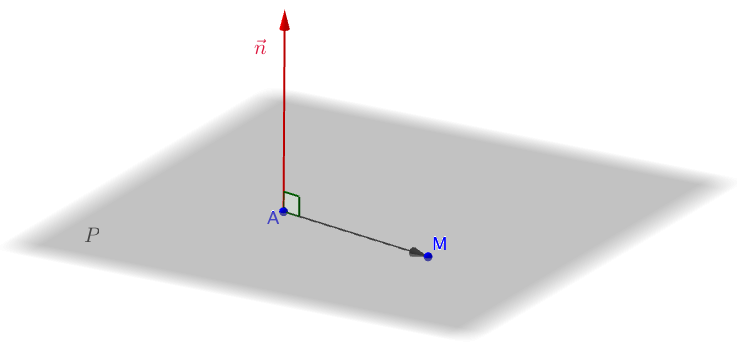
Un plan de vecteur normal non nul admet une équation de la forme

, avec .

Réciproquement, si , et sont non tous nuls, l'ensemble des points tels que

, avec , est un plan.

Cette équation s’appelle **équation cartésienne** du plan .

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/equacartesienneplan

- Soit un point de .

et sont orthogonaux

.

avec

- Réciproquement, supposons par exemple que (, et sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points vérifiant l'équation

Alors le point vérifie l'équation . Et donc *E.*

Soit un vecteur . Pour tout point , on a :

..

*E* est donc l'ensemble des points tels que ..

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par et de vecteur normal .

Exemple : Le plan d'équation cartésienne a pour vecteur normal

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

**Vidéo** : **mathssa.fr/espace8**

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point et de vecteur normal .

**Correction**

● est un vecteur normal au plan P. Une équation cartésienne de est donc de la forme .

● Le point appartient à donc ses coordonnées vérifient l'équation :

donc .

Une équation cartésienne de est donc : .

**Une image contenant capture d’écran, ligne, conception

Description générée automatiquementPropriété** : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, les plans et ont pour équations respectives :

et .

Démontrer que les plans et sont perpendiculaires.

**Correction**

Les plans et sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de est et un vecteur normal de est .

Les vecteurs et sont orthogonaux donc les plans et sont perpendiculaires.

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

**Vidéo** [**mathssa.fr/espace9**](https://youtu.be/BYBMauyizhE)

Dans un repère orthonormé, le plan a pour équation.

Soit et.

a) Démontrer que la droite () et le plan sont sécants.

b) Déterminer leur point d'intersection.

Une image contenant ligne, diagramme, Police

Description générée automatiquement

**Correction**

a) Un vecteur normal de est .

() et sont sécants si et ne sont pas orthogonaux.

On a : .

Comme : , on conclut que () et le plan ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

b) Une représentation paramétrique de la droite () est :

, .

Le point , intersection de () et de , vérifie donc le système suivant :

On a donc :

soit

D’où :

Ainsi la droite () et le plan sont sécants en .

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d’un point sur une droite

Dans un repère orthonormé, on donne les points , et .

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point sur la droite ().

**Correction :**

On appelle le projeté orthogonal du point sur la droite ().

On a :

Une représentation paramétrique de () est :

, .

Le point appartient à la droite () donc ses coordonnées vérifient les équations du système paramétrique de ().

On a ainsi : et donc

Or, et sont othogonaux, donc :

.

Le point , projeté orthogonal du point sur la droite (), a donc pour coordonnées :

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d’un point à un plan

Dans un repère orthonormé, le plan a pour équation.

Soit

a) Déterminer les coordonnées de J projeté orthogonal de I sur le plan P

b) Déterminer la distance entre le point I et le plan P.

**Correction :**

a)La droite (d) perpendiculaire à P passant par I a pour vecteur directeur un vecteur normal à P par exemple :

Une représentation paramétrique de cette droite (d) est :

, .

Le point J est l’intersection de la droite (d) et du plan (P) .

On résout le système :

soit

*b) donc .*

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans - NON EXIGIBLE -

Dans un repère orthonormé, les plans et ont pour équations respectives :

et .

1) Démontrer que les plans sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection .

**Correction**

1) sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de est et un vecteur normal de est .

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point de , intersection de et de *,* vérifie donc le système suivant :

On choisit par exemple comme paramètre et on pose . On a alors :

Ce dernier système est une représentation paramétrique de *,* avec .

**RÉSUMÉ : Pour démontrer des positions relatives**

● droite de vecteur directeur .

plan de vecteur normal .

et sont…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| parallèles |  | Une image contenant ligne  Description générée automatiquement |
| sécants |  | Une image contenant ligne, diagramme  Description générée automatiquement |
| orthogonaux | et colinéaires | Une image contenant ligne, conception  Description générée automatiquement |

● plan de vecteur normal .

plan de vecteur normal .

et sont…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| parallèles | et colinéaires | Une image contenant ligne, capture d’écran, blanc, croquis  Description générée automatiquement |
| sécants | et non colinéaires | Une image contenant ligne, Police, texte, capture d’écran  Description générée automatiquement |
| perpendiculaires |  | Une image contenant texte, capture d’écran, conception  Description générée automatiquement |