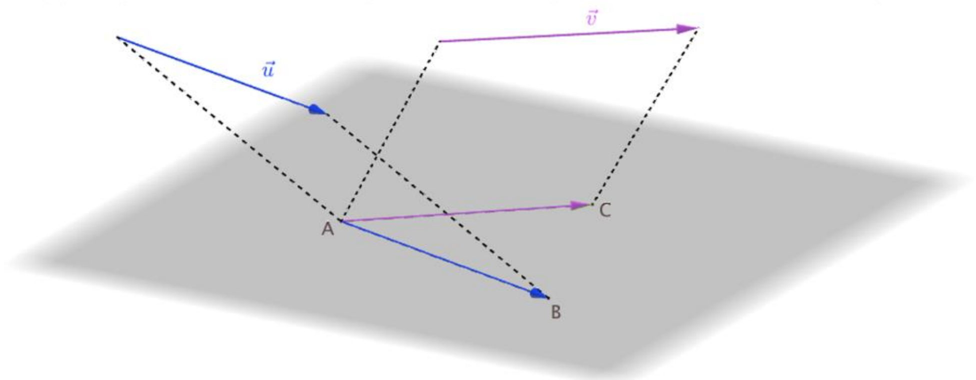
CHAPITRE 7 – Orthogonalité dans l’espace

Tout le cours en vidéo : mathssa.fr/produitscalesp et mathssa.fr/produitscalesp2

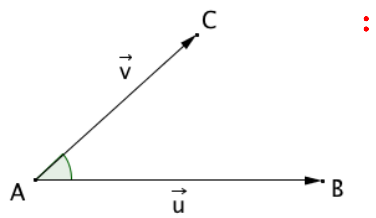
I-Produit scalaire de deux vecteurs de l’espace

1.Définition et propriétés

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On retrouve alors dans l’espace toutes les propriétés du pr :



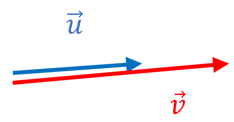
1ère formule du produit scalaire:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, dans le cas contraire.

Cas particuliers :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,



$$\vec{u}.\vec{v} = (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0)) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi)) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Propriétés (identités remarquables): Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Formules de polarisation : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

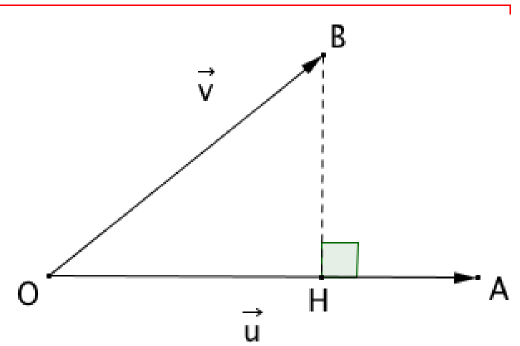
2ème formule du produit scalaire:

Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Propriété :
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

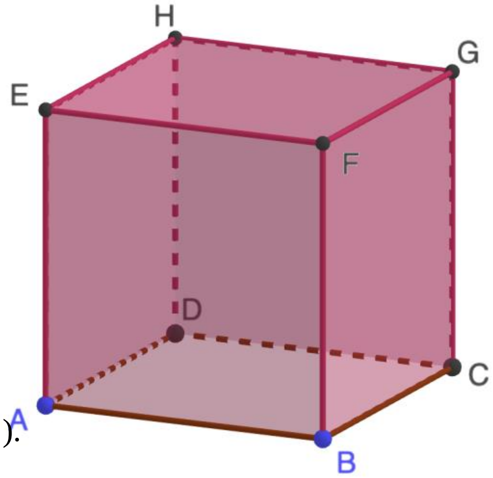
3ème formule du produit scalaire :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Méthode : Calculer le produit scalaire dans l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{HD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GF}$



Correction

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$, B étant le projeté orthogonal de F sur (AB).
$= AB^2 = a^2$

b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EA} = 0$ car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}$

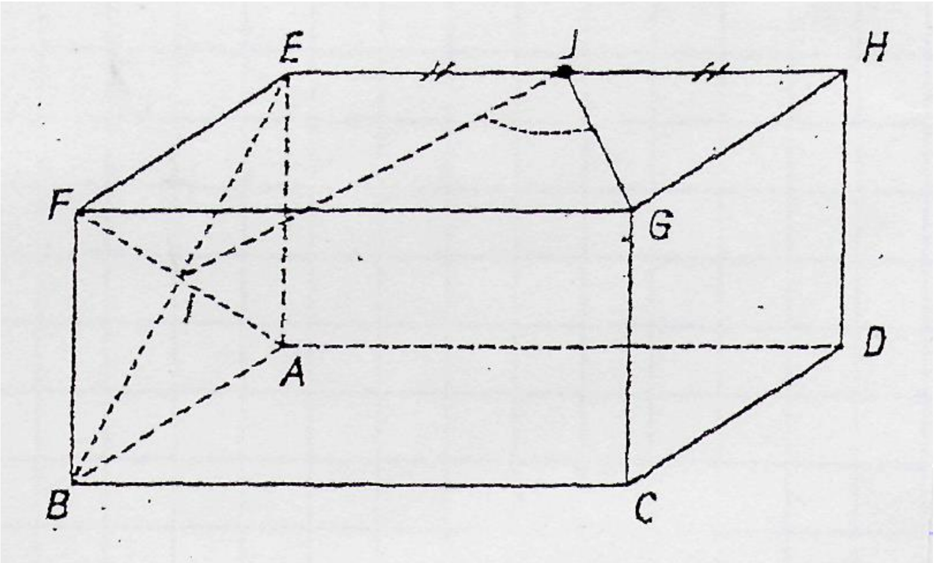
$$= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -AD^2$$
$$= -a^2$$

Exercice 2 :

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle vérifiant :

$AB = AE = 2$ et $AD = 4$.

Soit I le centre du rectangle $ABFE$ et J le milieu du segment $[EH]$.



Déterminer la valeur de $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}$.

2.Produit scalaire dans un repère orthonormé

Définitions :

● Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

● Un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée**.**

4ème formule du produit scalaire

Propriétés : Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

● Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

● Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ deux points de l'espace.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration :

● $\vec{u}.\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k})$

$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}.\vec{k} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{\imath} + xy'\vec{k}.\vec{\jmath} + zz'\vec{k}.\vec{k}$

$= xx' + yy' + zz'$

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$:
$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$

● On a, en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

● Et : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$

Application :

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les trois points $A(-2\,;1\,;3)$, $B(4\,;2\,;-1)$ et $C(0\,;-2\,;3)$. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

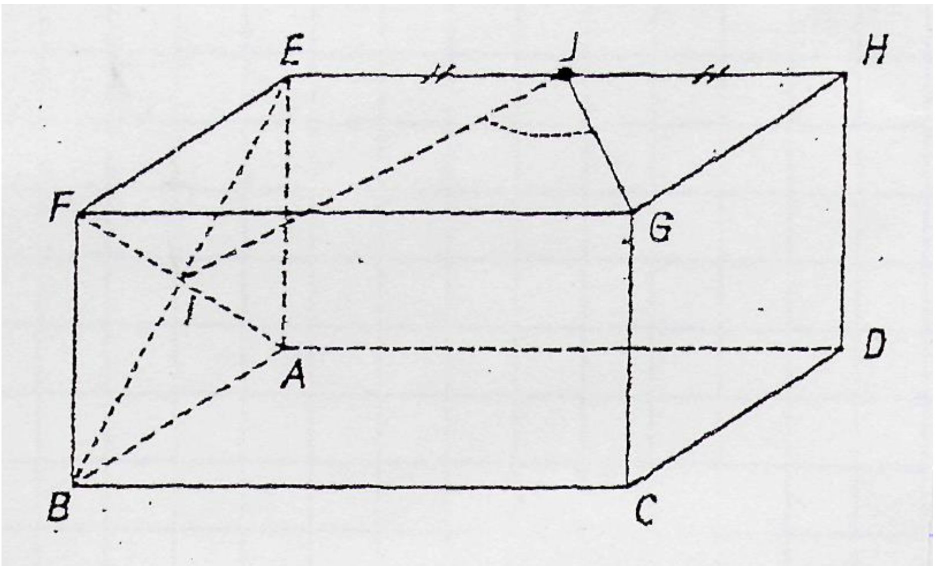
$\overrightarrow{AB}(6;1;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-3;0)$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6\times 2 + 1\times(-3) + (-4)\times 0 = 9$

<u>Exercice corrigé : calcul d'angle dans l'espace</u>

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle vérifiant :

$AB = AE = 2$ et $AD = 4$.

Soit I le centre du rectangle $ABFE$ et J le milieu du segment $[EH]$.



1. En utilisant le repère orthonormal $(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points
2. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}$.
3. Déterminer, à 0,1° près , la mesure de l'angle géométrique $I\hat{J}G$

1. Dans le repère orthonormal $(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$:
$A(0\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(4\,;2\,;0)$, $D(4\,;0\,;0)$
$E(0\,;0\,;2)$, $F(0\,;2\,;2)$, $G(4\,;2\,;2)$, $H(4\,;0\,;2)$
$I(\frac{0+0}{2};\frac{0+2}{2};\frac{0+2}{2})$ soit $I(0\,;1\,;1)$ I est le centre de ABFE donc le milieu de [AF]
$J(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2};\frac{2+2}{2})$ soit $J(2\,;0\,;2)$ J est le milieu de [EH]
2. $\overrightarrow{JI}(-2;1;-1)$ *et* $\overrightarrow{JG}(2;2;0)$ $\quad \overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}=(-2)\times 2+1\times 2+(-1)\times 0=-2$

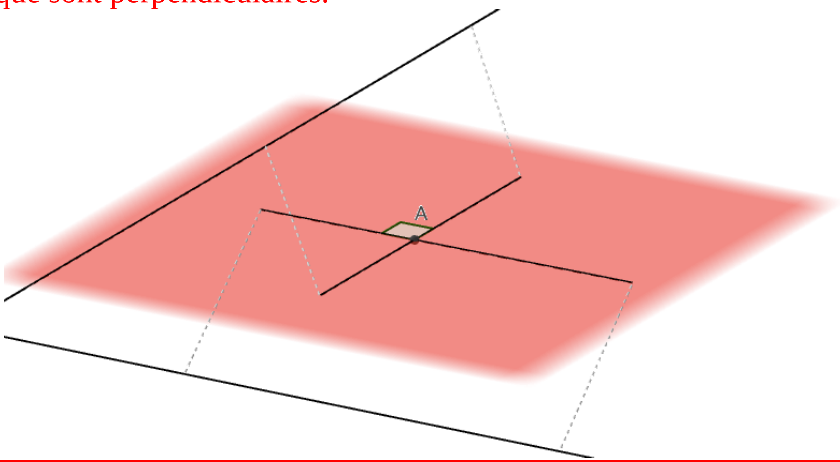
$JI=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \qquad JG=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$

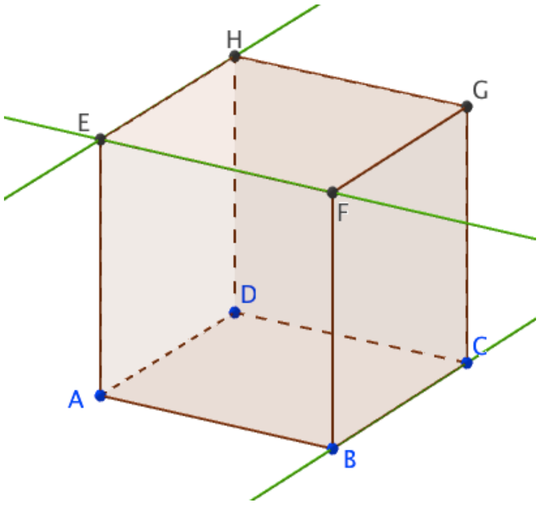
On a $JI\times JG\times\cos(I\hat{J}G)=-2$ soit $\cos(I\hat{J}G)=\frac{-2}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{12}}{12}$
$I\hat{J}G=cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{12}}{12}\right)\approx 106{,}78°$

II-Orthogonalité dans l'espace

1. Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.





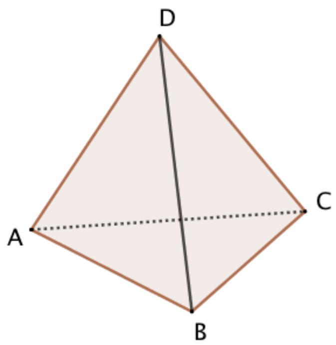
<u>Exemple :</u>

$ABCDEFGH$ est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

<u>Remarques :</u>
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

<u>Méthode :</u> Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

<u>Exercice 1 :</u>Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur a
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.



Correction
On va prouver que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} &= AD \times AB \times cos\left(\widehat{DAB}\right)\\ &= a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

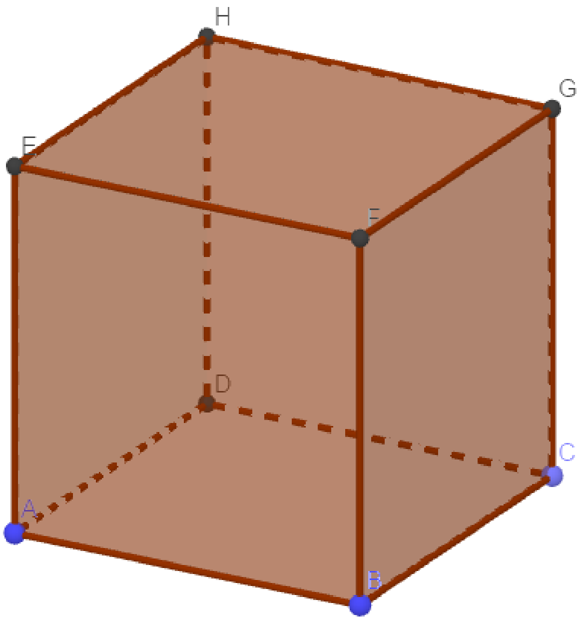
On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux, et donc
Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

Exercice 2:

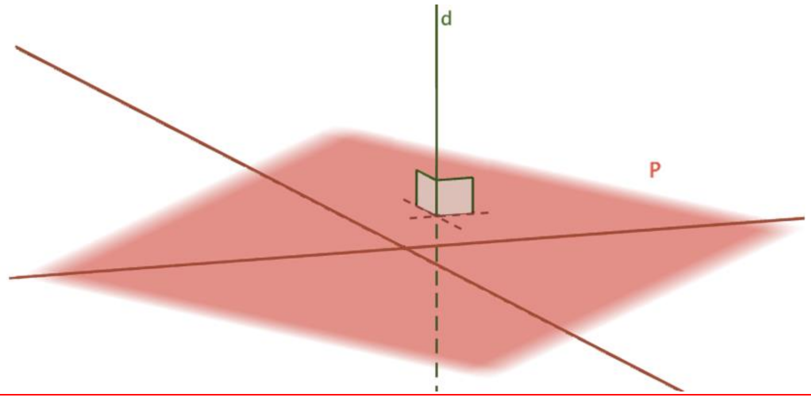
ABCDEFGH est un cube de coté a . Le point I est le centre de la face DCGH et J est le milieu du segment [AD]. Dans un repère bien choisi, donner les coordonnées des points A,I,B et J.
Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont orthogonales.



Dans le repère orthonormé
$(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DG})$:$A(0\,;1\,;0)$, $B(1\,;1\,;0)$, $I(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2})$ et $J(0\,;\frac{1}{2}\,;0)$
$\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BJ}(-1;-\frac{1}{2};0)$ $\quad \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\times(-1)+(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 0=0$
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$sont orthogonaux et donc que les droites (AI) et (BJ) sont orthogonales.

2.Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P.

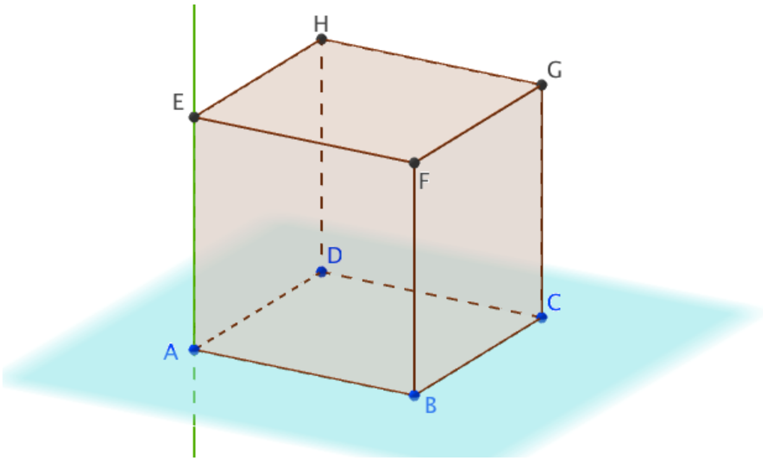


Propriété : Si une droite d est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Démonstration :
Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.

Soit une droite quelconque Δ de P de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que Δ est orthogonale à d.
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de P (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc d est orthogonale à Δ.

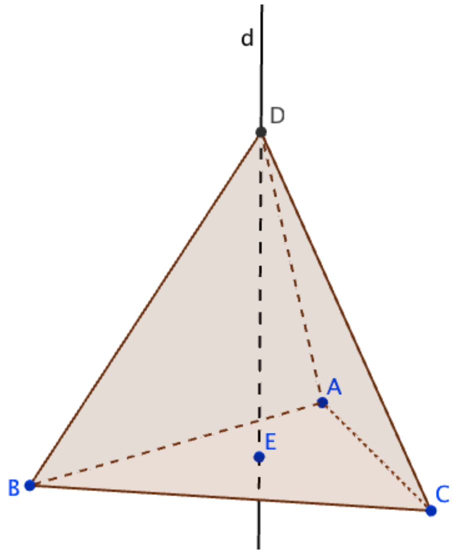
<ins>Exemple :</ins>
$ABCDEFGH$ est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABD).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



<ins>Méthode :</ins> Démontrer que des droites sont orthogonales

Vidéo mathssa.fr/orthodroiteplan

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses hauteurs.
La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide $ABCD$ est telle que D soit un point de la droite d.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



<ins>Correction :</ins>
La droite d est orthogonale au plan (ABC).
La droite d est donc orthogonale à toutes les droites du plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite d est orthogonale à la droite (AC).

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE).
Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

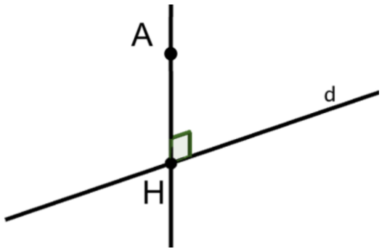
Et donc la droite (AC) est orthogonale à toutes les droites du plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

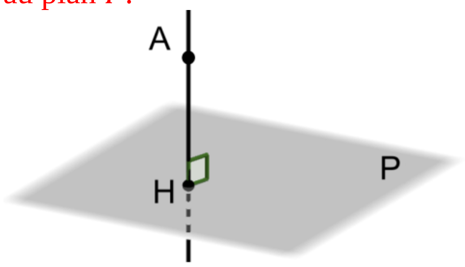
3.Projections orthogonales

Définitions :

● Soit un point A et une droite d de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur la droite d** est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.

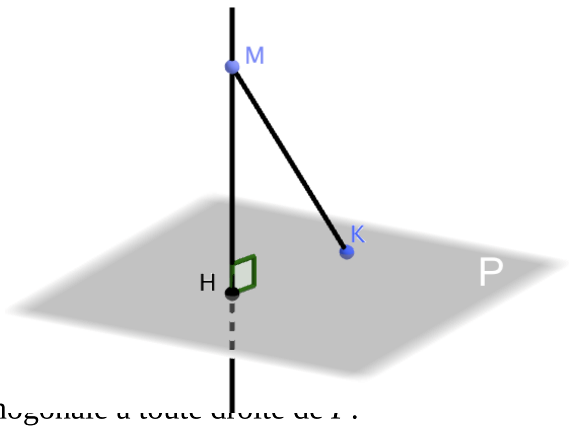


● Soit un point A et un plan P de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur le plan P** est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.



Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration au programme :
Vidéo **mathssa.fr/projeteortho**

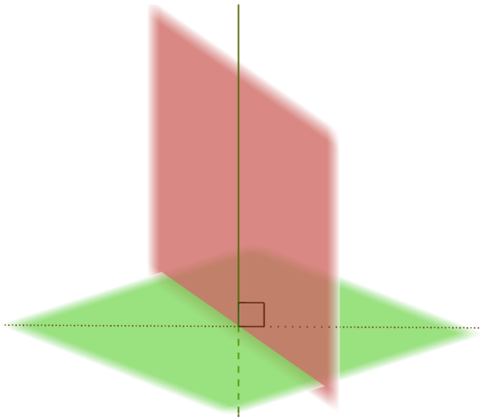


Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P.
Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H.

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, (MH) est orthogonale à P, donc (MH) est orthogonale à toute droite de P.
En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle MHK est donc rectangle en H.
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.

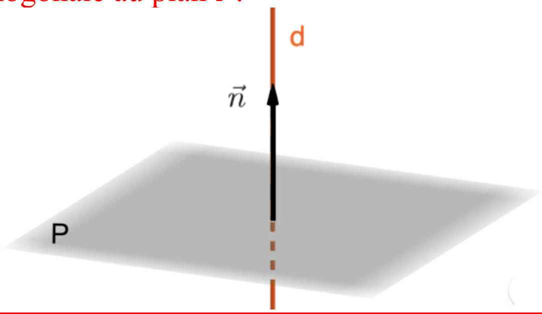
4.Orthogonalité de deux plans

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

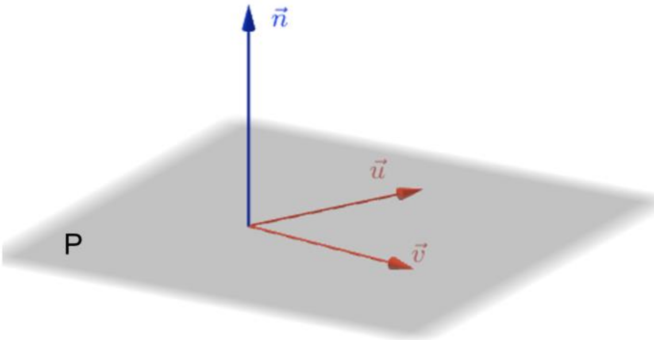


5.Vecteur normal à un plan

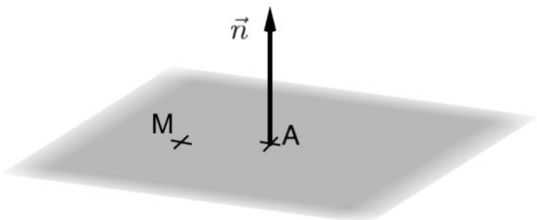
Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.



Propriété : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P.



Propriété : Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



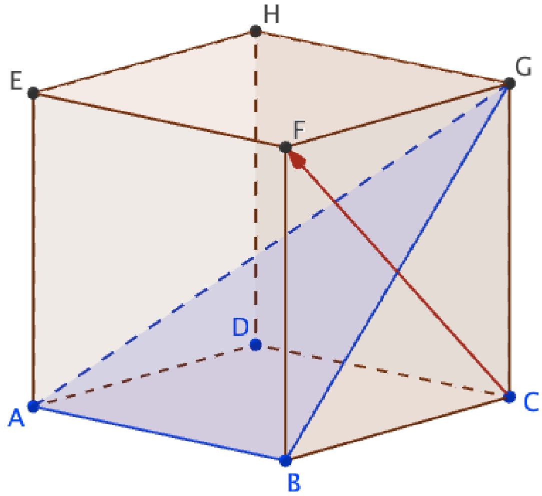
Remarque : la réciproque est bien entendu vraie

Au XIXe siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4

$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



Correction

On considère le repère orthonormé $\left(B\,;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :
$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, on donne : $A(1; 2; -2)$, $B(-1; 3; 1)$ et $C(2; 0; -2)$.
Démontrer que $\vec{n}(2; 1; 1)$ un vecteur normal au plan (ABC).

Correction

On a : $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(1; -2; 0)$.

$Les\ vecteurs\ \overrightarrow{AB}(-2; 1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(1; -2; 0)$ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (il n'existe pas de réel k tel que $\begin{cases} 1 = -2k \\ -2 = k \\ 0 = 3k \end{cases}$ $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -2 \\ k = 0 \end{cases}$)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 1 \times 3 = -4 + 1 + 3 = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC), il est donc normal à (ABC).

III-Equation cartésienne d'un plan -application

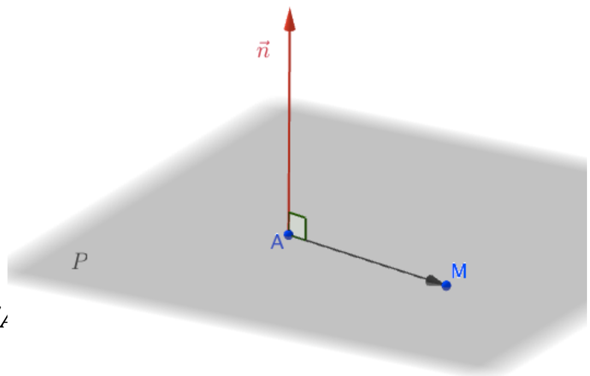
Vidéo : mathssa.fr/espace5

1.Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ non nul admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan.
Cette équation s'appelle **équation cartésienne** du plan P.

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/equacartesienneplan



- Soit un point $A(x_A;y_A;z_A)$ de P.

$M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ avec $d=-ax_A-by_A$

- Réciproquement, supposons par exemple que a

On note E l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'equation $ax+by+cz+d=0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$. Et donc $A\in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a;b;c)$. Pour tout point $M(x;y;z)$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b(y-0)+c(z-0)=\ ax+by+cz+d=0.$

E est donc l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-1;5)$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

Vidéo : mathssa.fr/espace8

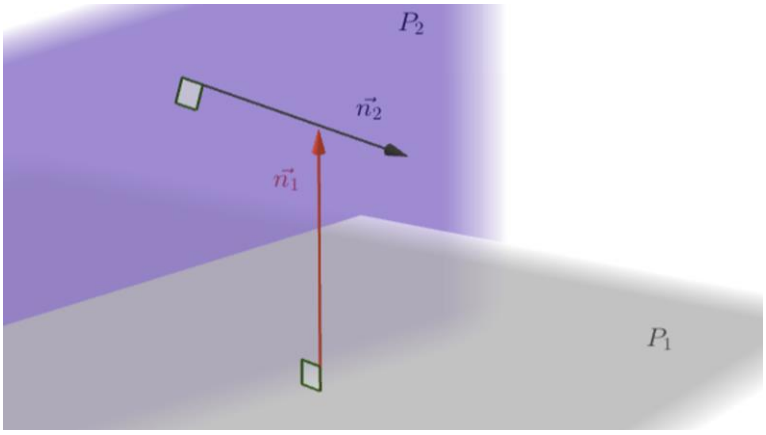
Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(-1;2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3;-3;1)$.

Correction

● $\vec{n}\begin{pmatrix}3;-3;1\\ \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P. Une équation cartésienne de P est donc de la forme $3x-3y+z+d=0$.

● Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation :
$3\times(-1)-3\times 2+1+d=0$ donc $d=8$.
Une équation cartésienne de P est donc : $3x-3y+z+8=0$.

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

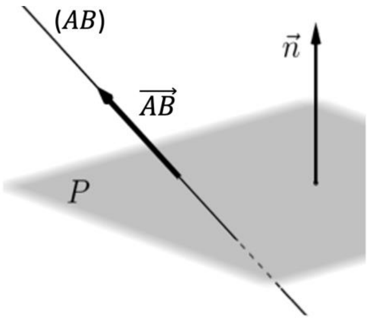
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :
$2x + 4y + 4z - 3 = 0$ et $2x - 5y + 4z - 1 = 0$.
Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

Correction
Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.
Un vecteur normal de P est $\vec{n}(2; 4; 4)$ et un vecteur normal de P' est $\overrightarrow{n'}(2; -5; 4)$.
$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 0$
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo **mathssa.fr/espace9**

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.
Soit $A(1; 2; -3)$ et $B(-1; 2; 0)$.
a) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
b) Déterminer leur point d'intersection.



Correction

a) Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(AB) et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme : $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -2 \times 2 + 3 \times 3 \neq 0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

b) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, intersection de (AB) et de P, vérifie donc le système suivant :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc : $2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$

$5t - 11 = 0$ soit $t = \frac{11}{5}$

D'où : $\begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5} \end{cases}$

Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\begin{pmatrix} -\frac{17}{5} \\ 2 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$ et $C(0; 1; -2)$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Correction :

On appelle H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est :
$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Le point H appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient les équations du système paramétrique de (AB).

On a ainsi : $H\begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t \\ 2 - t \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t - 1 \\ 2 - t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t - 1 \\ 4 - t \end{pmatrix}$

Or, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont othogonaux, donc :
$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$
$(1 - 2t) \times (-2) + (2t - 1) \times 2 + (4 - t) \times (-1) = 0$

$-2+4t+4t-2-4+t=0$
$9t-8=0$
$t=\frac{8}{9}$
Le point H, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), a donc pour coordonnées :

$$H\begin{pmatrix} 1-2\times\frac{8}{9} \\ 2\times\frac{8}{9} \\ 2-\frac{8}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $x-2y+3z+4=0$.
Soit $I(3;4;5)$
a) Déterminer les coordonnées de J projeté orthogonal de I sur le plan P
b) Déterminer la distance entre le point I et le plan P.

Correction :
a)La droite (d) perpendiculaire à P passant par I a pour vecteur directeur un vecteur normal à P par exemple : $\vec{n}(1;-2;3)$.
Une représentation paramétrique de cette droite (d) est :
$\begin{cases} x=3+t \\ y=4-2t \\ z=5+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$
Le point J est l'intersection de la droite (d) et du plan (P) .
On résout le système :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4-2t \\ z=5+3t \\ x-2y+3z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=4-2t \\ z=5+3t \\ 3+t-2(4-2t)+3(5+3t)+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=4-2t \\ z=5+3t \\ 3+t-8+4t+15+9t+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=4-2t \\ z=5+3t \\ 14t=-14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad J(2\,;6\,;2)$$

$b)\overrightarrow{IJ}(-1;2;-3)\ \ donc\,IJ=\sqrt{(-1)^2+2+(-3)^2}=\sqrt{14}\,.$

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans - NON EXIGIBLE -

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :
$-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.
1) Démontrer que les plans $P\ et\ P'$ sont sécants.
2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

Correction

1) P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.
Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de d, intersection de P et de P', vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}-x+2y+z-5=0\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases}x=t\\-t+2y+z-5=0\\2t-y+3z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3z=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3(-2y+t+5)=1-2t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y-6y+3t+15=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-7y=-14-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5\end{cases}$$

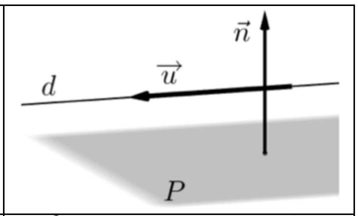
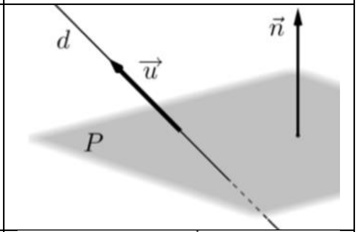
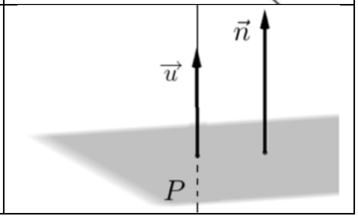
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=1-\frac{3}{7}t\end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de d, avec $t\in\mathbb{R}$.

RÉSUMÉ : Pour démontrer des positions relatives

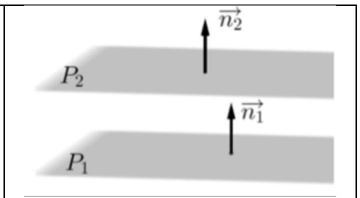
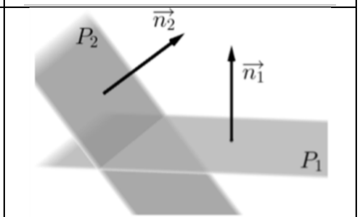
- d droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
  P plan de vecteur normal $\vec{n}$.

d et P sont…

parallèles	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	
sécants	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	
orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires	

- P_1 plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$.
  P_2 plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$.

P_1 et P_2 sont…

parallèles	$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ colinéaires	
sécants	$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires	
perpendiculaires	$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$