**CHAPITRE 8 – Primitives et intégrales**

**I-Rappels sur les équations différentielles**

**Vidéo :mathssa.fr/equadiff**

**1.Equation différentielle**

Définition :

Soit une fonction définie sur un intervalle .La fonction est une **solution** de l’équation différentielle si et seulement si pour tout de I, .

**2.Equation différentielle**

Propriété :

Les solutions de l’équation différentielle , , sont les fonctions de la forme où est une constante réelle quelconque.

Exemple :résoudre l’équation différentielle (E) : .

**Correction**

Les solutions de l’équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : , .

Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif

**3.Equation différentielle** *(*

**Propriété :**

La fonction est solution de l’équation différentielle ().

Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

**Propriété :**

Les solutions de l’équation différentielle (sont les fonctions

de la forme , où .

Solution de l’équation Solution particulière

constante de l’équation

Remarque : L’équation est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type

**Vidéos :** mathssa.fr/equadif4 et tmathssa.fr/equadif5

On considère l’équation différentielle (E) : .

a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l’équation.

b) Déterminer l’unique solution telle que .

**Correction**

a)

● Une solution particulière constante est la fonction : car .

● Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme : , .

● Les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme :

,

est solution de l’équation différentielle, donc de la forme : ,

Donc

Or,

Et donc :

Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif2

**3.Equation différentielle** *(*

**Propriété :**

est une fonction définie sur un intervalle .

Les solutions de l’équation différentielle (sont les fonctions de la forme :

, où .

Solution de l’équation Solution particulière

de l’équation

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type **Vidéo** mathssa.fr/equadif6

On considère l’équation différentielle .

a) Démontrer que la fonction définie sur par est solution particulière de l’équation différentielle.

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l’équation différentielle.

**Correction**

a)Pour tout reel ,

Donc :

On a donc :

La fonction définie sur par est donc une solution particulière de l’équation différentielle .

b) Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme , .

On en déduit que les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme :

, .

Pour s’entrainer : mathssa.fr/equadif3

**II-Notions de primitives**

Vidéo : mathssa.fr/primitivecours

**1. Notion de primitives d’une fonction sur un intervalle**

**Une approche:**

1.Soit la fonction *f* définie sur par.

Déterminer une fonction F dérivable sur dont la dérivée est *f*.

(en effet F est ce qu’on appelle une primitive de *f* sur ℝ)

2.soit définie sur par .

Déterminer une fonction F dérivable sur dont la dérivée est *f*.

La fonction F définie sur *F(x)* = est une primitive de *f* sur .

En existe t-il d’autres ? La réponse est oui par exemple : *G(x)* = +10

*H(x)* = -6 , … En fait , il en existe une infinité. Les primitives ont toutes la même structure . On les écrit sous la forme UNE PRIMITIVE + UNE CONSTANTE

**Définition :** est une fonction définie sur un intervalle .

On appelle **primitive** de , une fonction dérivable sur I, telle que :

**Remarque :** est une primitive de si et seulement si est une solution de l’équation différentielle .

**Exercice :** soit les deux fonctions suivantes définies sur

et .

Démontrer que F est une primitive de *f* sur

F est dérivable sur en tant que quotient de fonctions dérivables sur







Pour tout réel *x,*

Comme alors *F* est une primitive de *f*.

**2. Ensemble des primitives d’une fonction sur un intervalle**

**Propriétés :**

* Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive F sur cet intervalle.
* On suppose que F est une **primitive** de .

est une **primitive** de si et seulement si il existe un réel tel que

**Preuve :**

**1er point : cf partie III**

**2ème point : vidéo : mathssa.fr/primitivedemo.html**

Soit et deux primitives de la fonction sur .  
Alors : et .  
Donc : , soit , soit encore .  
La fonction possède une dérivée nulle sur , elle est donc constante sur .  
On nomme cette constante. Ainsi : pour tout de .

On en déduit que les deux primitives de diffèrent d’une constante.

**Conséquences**:

* Deux primitives d’une même fonction continue sur un intervalle I diffèrent d’une constante.
* On dit que l’ensemble des **primitives** d’une fonction continue sur I est l’ensemble des fonctions G définies sur I par  , avec .
* On suppose que est continue sur I.

Soient un réel de I et un réel . Il existe une unique primitive G de sur I telle que

**Remarque :** il faudra faire attention au vocabulaire utilisé

Connaissant **une** **primitive** F de on pourra déterminer :

* **toutes** les **primitives** de (ensemble des fonctions de la forme F+k où k )
* **la primitive** de la fonction si on connaît l’image d’un réel par F.

**Exemples** :

est une primitive de la fonction sur

est la primitive de la fonction sur qui s’annule en .

Les fonctions du type où sont les primivites de la fonction sur

**Exercice :** soit les deux fonctions suivantes définies sur

et .

1.Démontrer que F est une primitive de *f* sur .

2.Déterminer **la** primitive de qui s’annule en .

1.F est dérivable sur en tant que produit de fonctions dérivables sur .







Pour tout réel *x* de ,

Comme alors *F* est une primitive de *f*.

2.

* Les primitives de la fonction *f* sont les fonctions G définies sur par (k ∈ ℝ)
* G(1)=0 nous permet d’écrire

*G(x)=*

**3.** **Primitives de fonctions de référence**

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction** | **Une primitive** |
| , |  |
| avec |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Propriété de linéarité des primitives :**

Si est une primitive de et est une primitive de alors :

est une primitive de et est une primitive de avec réel.

Démonstrations :

-

-

Exemples : déterminer une primitive à l’aide de la linéarité

vidéos : mathssa.fr/primitive , mathssa.fr/primitive2 et mathssa.fr/primitive3

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction .

a) b) c)

d) sur e) f)

**Correction**

a)

b) donc

c) donc

d) donc

e) donc

f) donc

**4.Primitives de fonctions composées**

est une fonction dérivable sur un intervalle I.

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction** | **Une primitive** |
| avec |  |
| avec |  |
| avec |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Point méthode : pour déterminer une primitive d’une fonction , il faut (à une constante près), écrire sous la forme d’une dérivée du cours, identifier les fonctions intermédiaires puis utiliser les primitives des fonctions composées.

Exercice : Déterminer une primitive à l’aide des formules Vidéo :mathssa.fr/primitive4

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction .

1. b) c)

**Correction**

. est continue sur donc admet au moins une primitive F.

* Pour tout réel ,

. est continue sur donc admet au moins une primitive F.

* Pour tout réel ,

c)  . est continue sur donc admet au moins une primitive F.

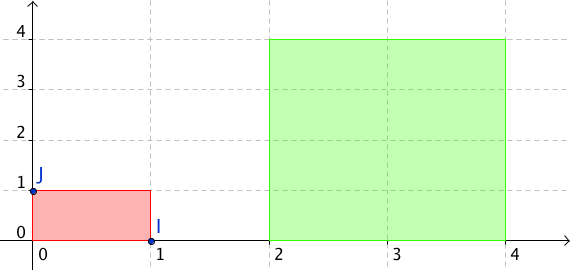
* Pour tout réel ,

**III-Notion d’intégrale d’une fonction continue**

Vidéo :mathssa.fr/integralecours.html

1. **Aire sous une courbe:**

**a)Unité d'aire**



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge.

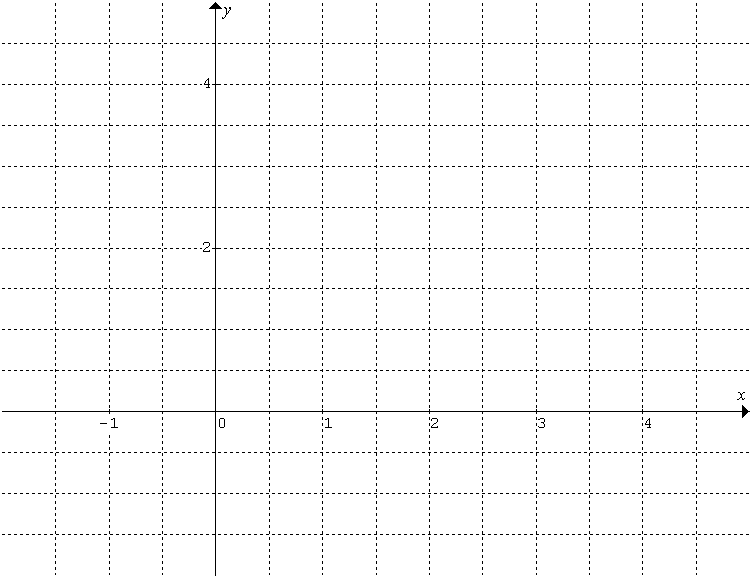
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm2 par exemple).

**b) Aire sous la courbe :**

|  |
| --- |
| Capture d’écran 2012-05-23 à 17**Définition :**  Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [*a ;b*] de courbe représentative Cf .  **L’aire du domaine sous la courbe** Cf est l’aire du domaine compris entre la courbe , l’axe des abscisses et les droites d’équation *x=a* et *x=b*.  Cette aire s’exprime en **unité d’aire** (u.a.) ou en **cm².** |

**Remarque** : la continuité garantit une certaine « régularité » du « bord » du domaine, ce qui permet d’expliquer l’existence de l’aire



**Exemples :**

* **1er exemple : fonction constante**

soit *f* la fonction définie sur [0 ;3] par *f(x)=2*

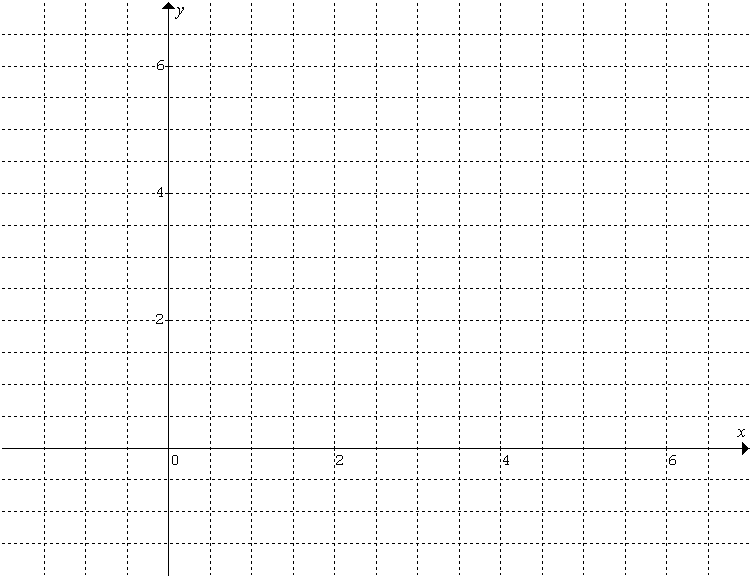
L’aire du domaine sous la courbe Cf est

l’aire du rectangle de coté 2 et 3

A= 2×3 =6 u. a.

* **2ème exemple : fonction affine par morceau**

soit *f* la fonction définie sur [0 ;6] par *f(x)=2x* sur [0 ;3] et *f(x)=9-x* sur [3 ;6]



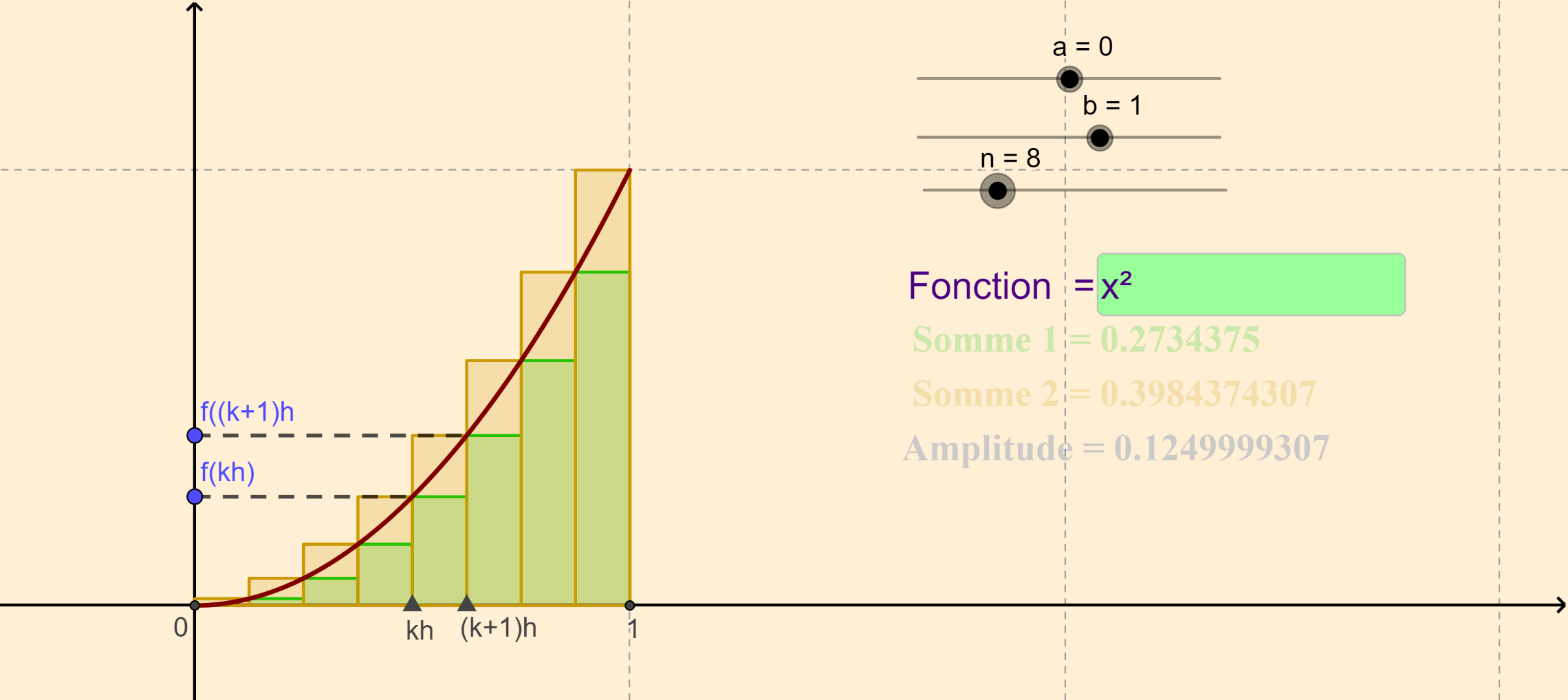
L’aire du domaine sous la courbe Cf est l’aire d’un triangle rectangle de coté 3 et 6 plus l’aire d’un trapèze de bases 3 ,6 et de hauteur 3.

A= u. a.

**2.Approcher l’aire sous une courbe par somme d’aire de rectangles**

Soit *f* : *x x2* sur [ 0 ; 1].

Soit *D* le domaine sous la courbe C.

**On veut déterminer un encadrement de l’aire A de *D*.**

*Idée :approcher l’aire A par des sommes d’ aires de rectangles*

🡪 on subdivise l’intervalle [*0 ;1*] en *n* intervalles de longueur  avec *n* \*

🡪 sur chaque intervalle de longueur *h* :

( avec ), on construit :

le rectangle « inférieur » Rk de hauteur et le rectangle « supérieur » R’k de hauteur

La somme des aires des rectangles « inférieurs »

est notée *u* , celle des rectangles supérieurs est

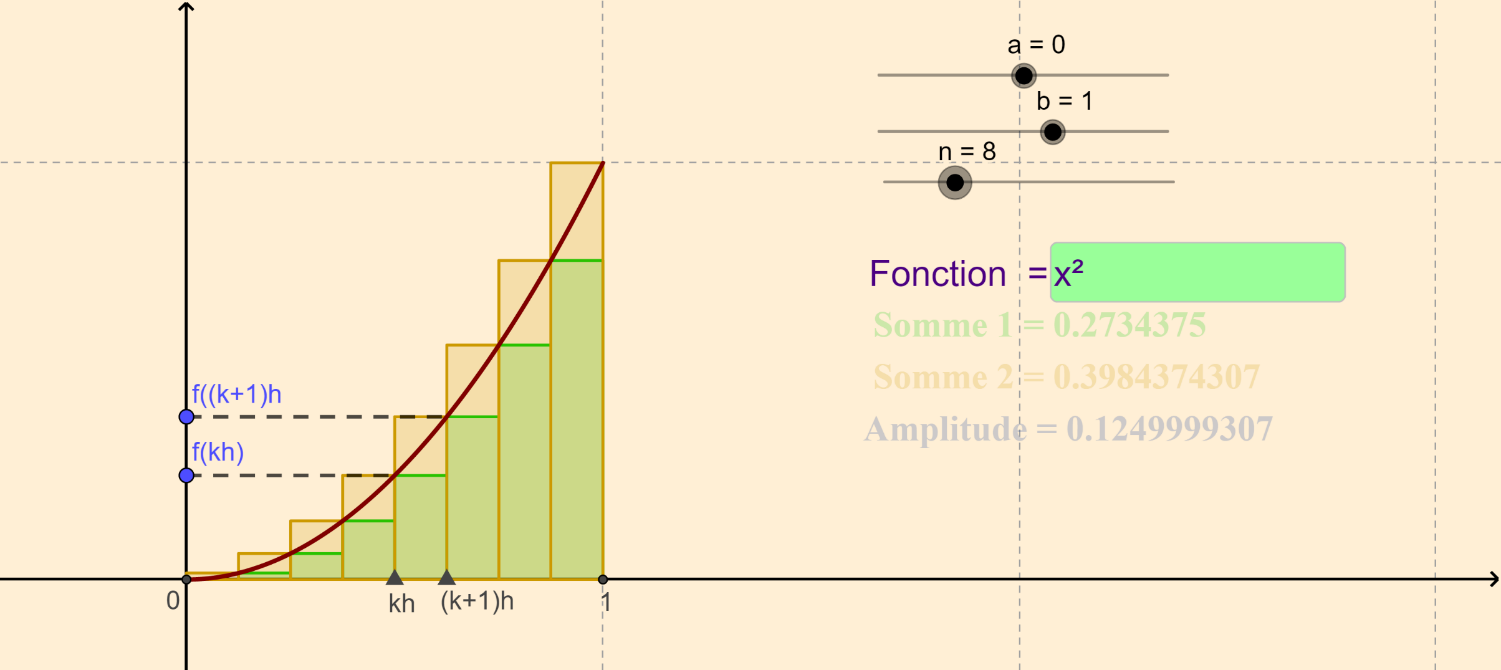
notée *v*.

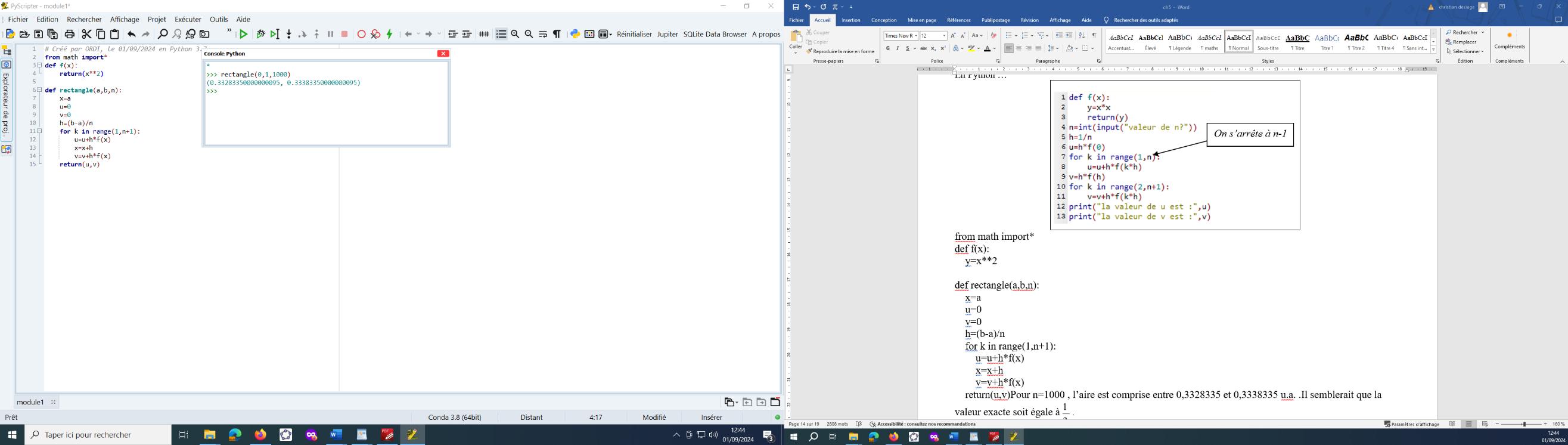
L’aire sous la courbe A sera comprise entre *u* et *v*.

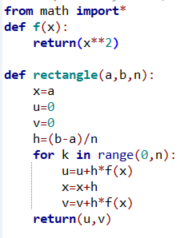


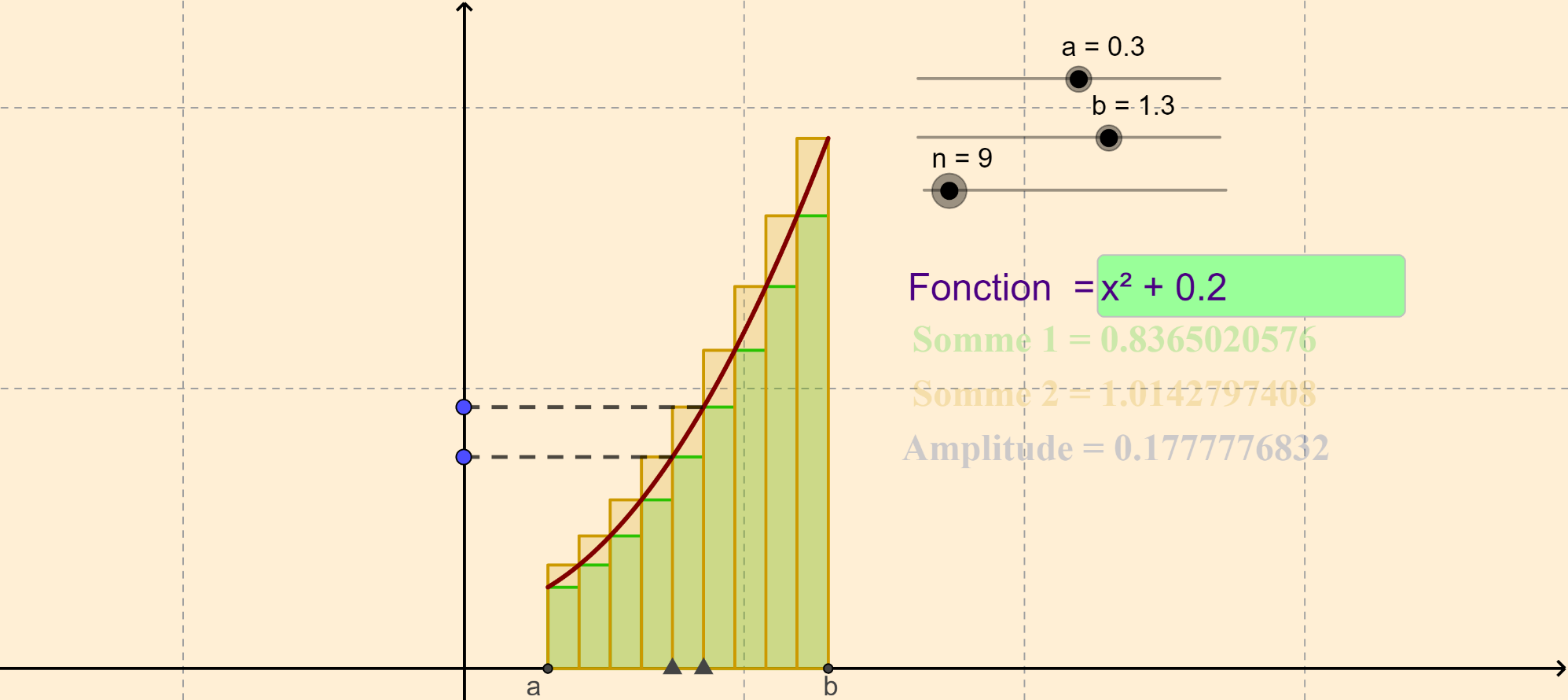
Faisons le tableau d’état des variables lorsque n=10. Puis complétons le programme ci-dessous.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* |
| *h* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* | *0,1* |
| *k* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| *u* | *0+0,1f(0)*  *=0* | *0+0,1f(0,1)*  *=0,001* | *0,001+0,1f(0,2)*  *=0,005* | *0,005+0,1f(0,3)*  *=0,014* | *0,0014+0,1f(0,4)*  *=0,030* | *0,0014+0,1f(0,5)*  *=0,055* | *0,0014+0,1f(0,6)*  *=0,091* | *0,091+0,1f(0,7)*  *=0,140* | *0,140+0,1f(0,8)*  *=0,204* | *0,204+0,1f(0,9)*  *=0,285* |
| *v* | *0+0,1f(0,1)*  *=0,001* | *0,001+0,1f(0,2)*  *=0,005* | *0,005+0,1f(0,3)*  *=0,014* | *0,0014+0,1f(0,4)*  *=0,030* | *0,0014+0,1f(0,5)*  *=0,055* | *0,0055+0,1f(0,6)*  *=0,091* | *0,091+0,1f(0,7)*  *=0,140* | *0,140+0,1f(0,8)*  *=0,204* | *0,204+0,1f(0,9)*  *=0,285* | *0,285+0,1f(1)*  *=0,385* |

L’aire est comprise entre 0,285 et 0,385 ua

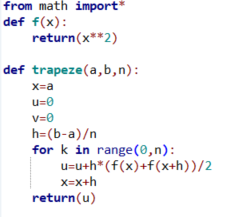
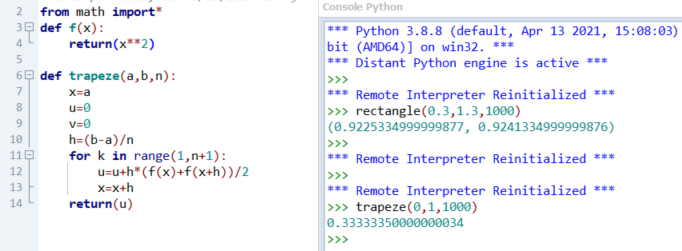




Encadrer l’aire sous la courbe de la fonction *f* définie sur [0,3 ;1,3] par *f(x)=x²+0,2*

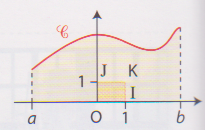
**

Ecrire un programme permettant d’obtenir une valeur approchée de l’aire sous la courbe en utilisant non plus un rectangle supérieur ou inférieur mais un trapèze. Programmer cet algorithme sur EduPython.

**3.Définition de l’intégrale d’une fonction continue positive**

**Définition** :

Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [ *a ; b* ].

Soit Cf la courbe de *f* dans un repère orthogonal (O ;  ; ).

L’**unité d’aire** est l’aire du rectangle OIKJ (rectangle de coté 1)

***L’intégrale de a à b de la fonction f*** , notée **** est l’aire du domaine compris entre l’axe des abscisses , la courbe de *f* et les droites d’équation *x=a* et *x=b*.

Cette aire est aussi appelée « **aire du domaine sous la courbe de *f* entre *a* et *b*** »

**Remarques :**

* le symbole  est un « S » stylisé ( le S signifiant Somme) pour rappeler la méthode d’obtention de l’intégrale par somme d’aires de rectangles de dimensions *f(x)* et *dx*
* la variable *x* est « muette », ce qui signifie qu’elle peut être remplacée par n’importe quelle autre variable : **** = ****=****
* L’intégrale d’une fonction continue positive est positive

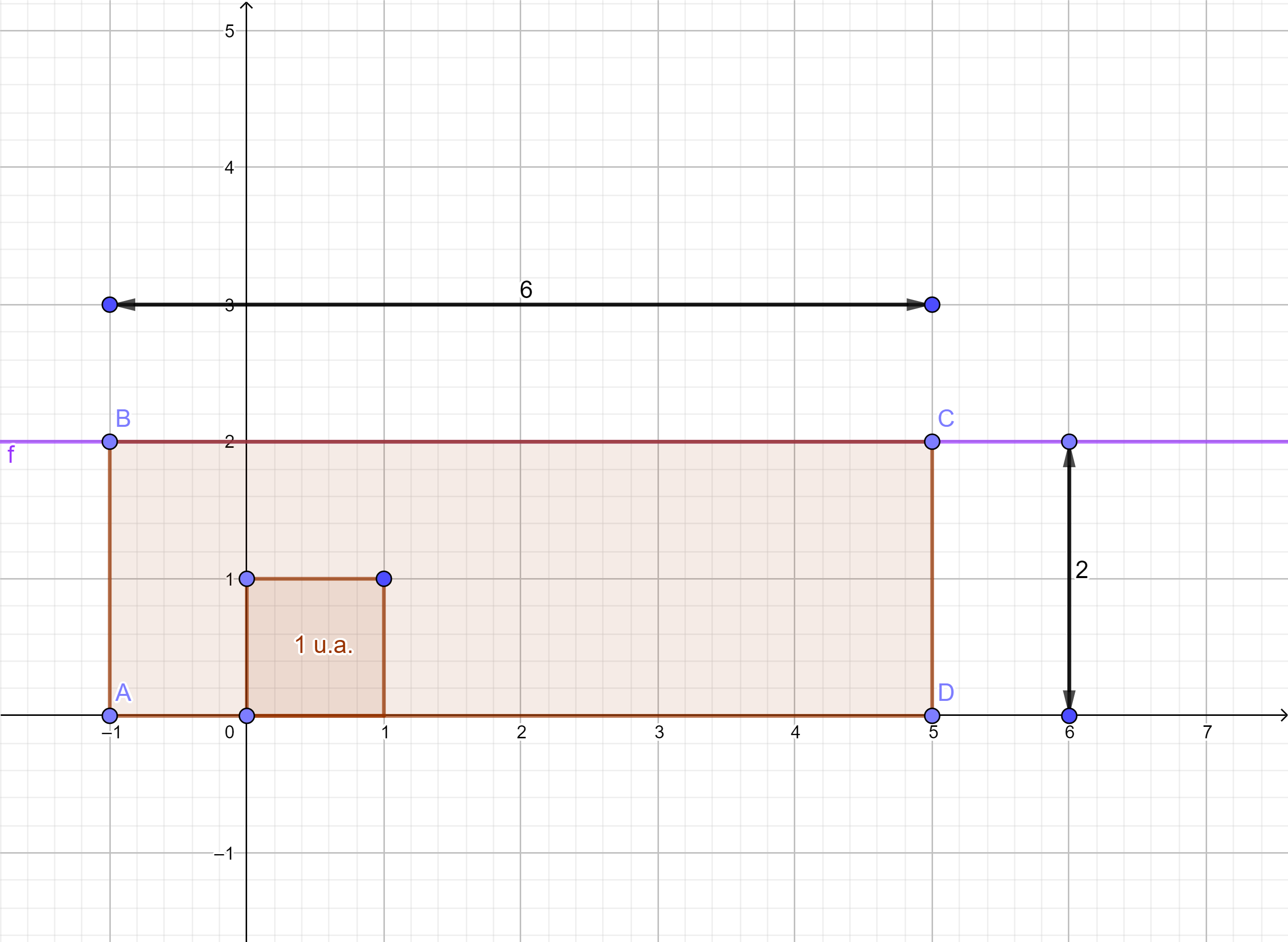
|  |
| --- |
| **Propriétés immédiates*:***    * **Relation de Chasles**   Pour tous réels *a≤ b≤ c* , |

**Remarques :**

\* la relation de Chasles traduit une simple sommation d’aires…

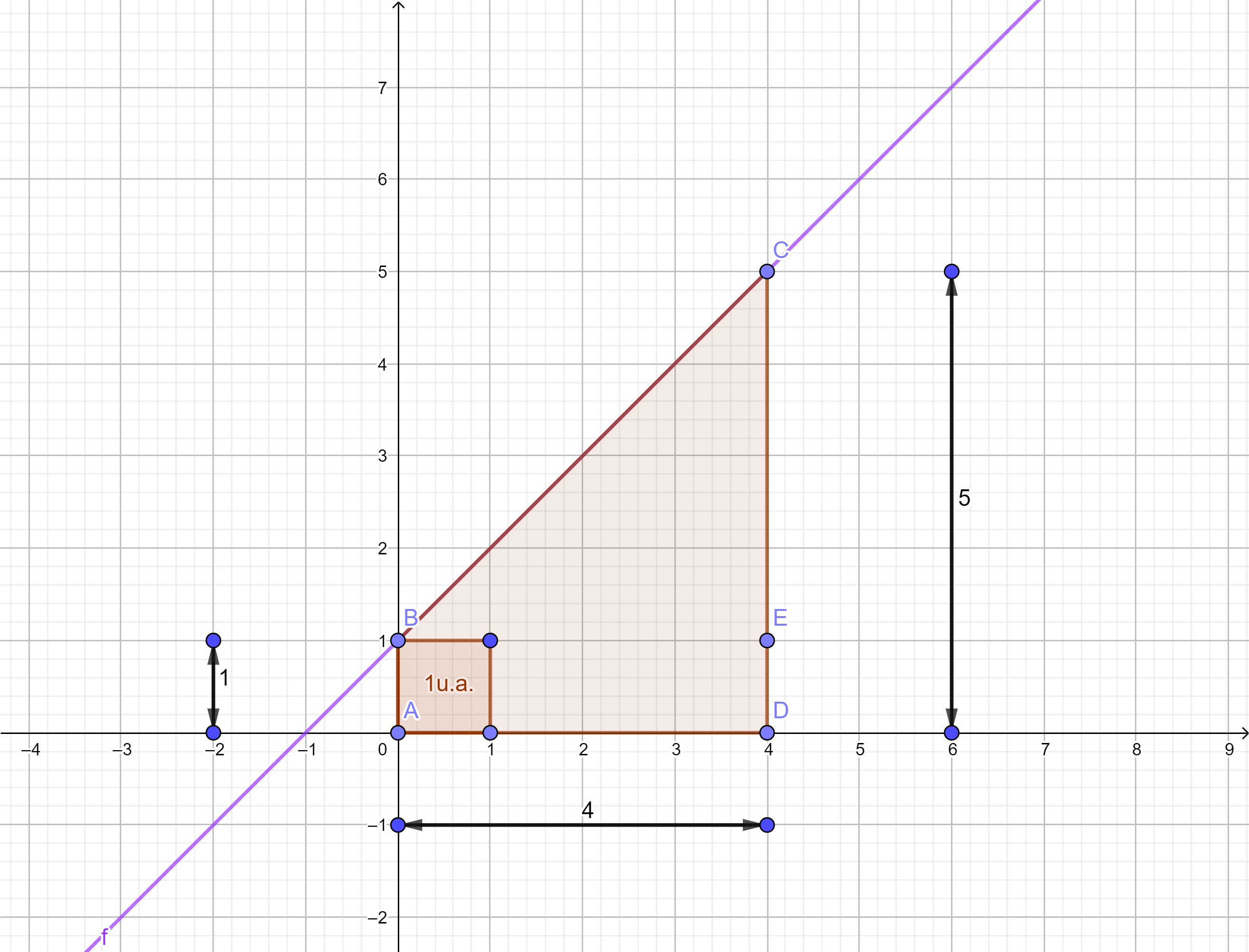
\* par convention (pour l’instant),

* est l’aire du domaine compris entre la courbe de la fonction constante égale à 2 , l’axe des abscisses , les droites d’équation *x=-1* et *x=5*.



C’est l’aire du rectangle ABCD.

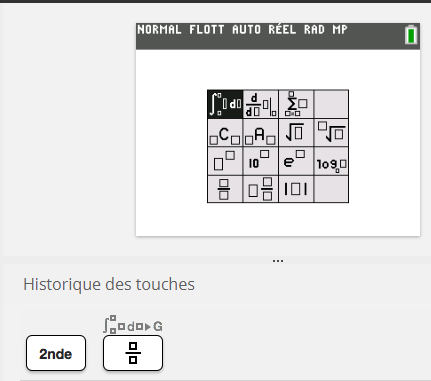
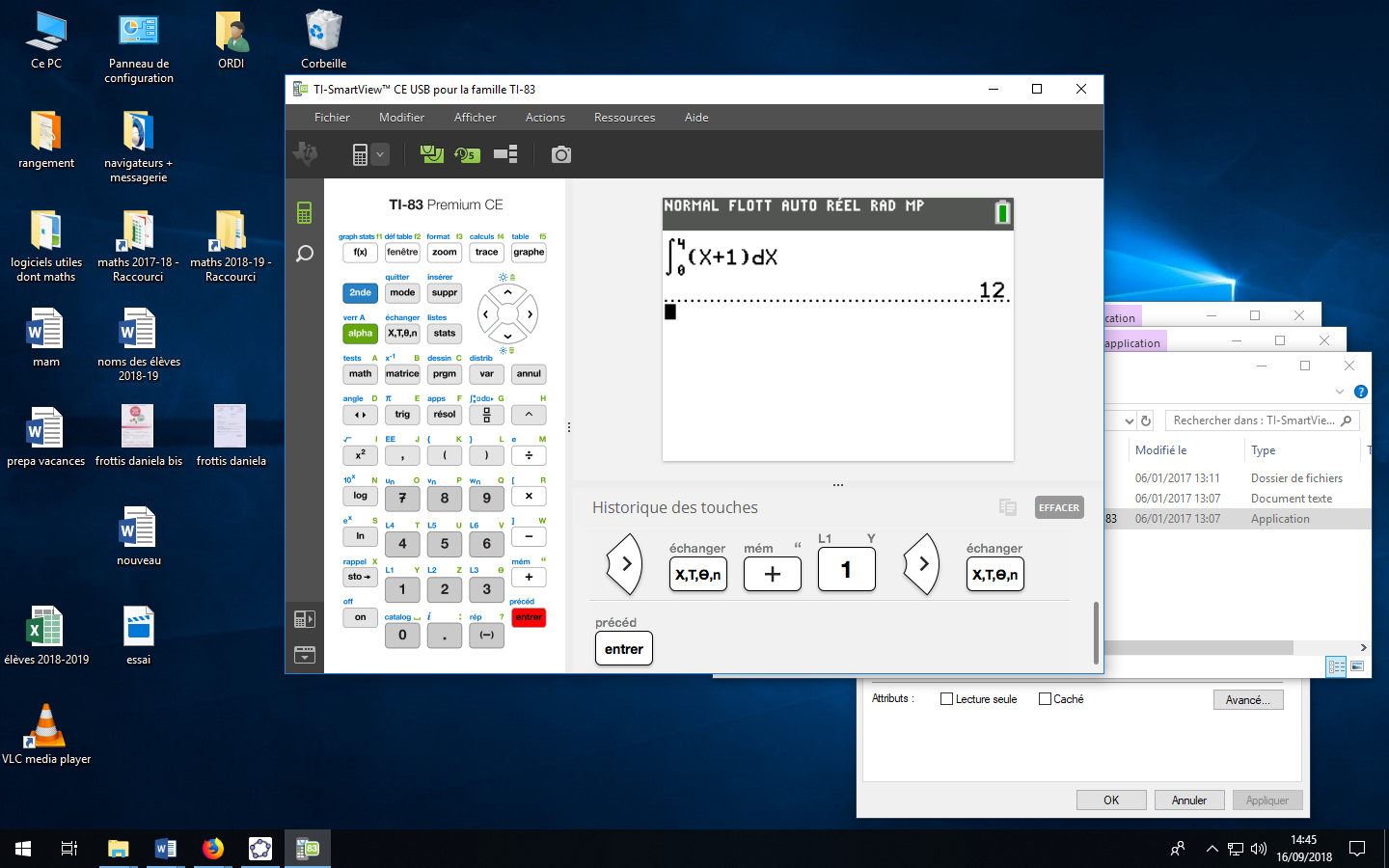
* est l’aire du domaine compris entre la courbe de la fonction *f* définie par , l’axe des abscisses , les droites d’équation *x=0* et *x=4*.



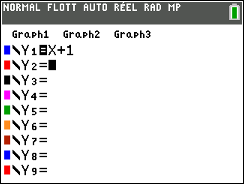
C’est l’aire du trapèze rectangle ABCD. (c’est aussi l’aire du rectangle ABED plus l’aire du triangle rectangle BEC soit )

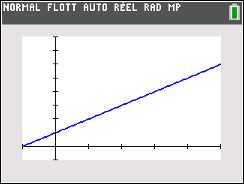
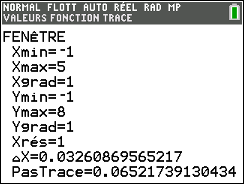
**Avec la calculatrice :** on cherche à calculer

* **Soit à l’aide d’un calcul :**

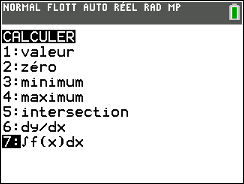
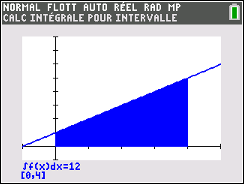


* **Soit à l’aide de la représentation graphique**

f(x) fenêtre Graph

****

calculs(2nd Trace) Entrer 0 puis 4

****

**4.Extension aux fonctions de signe quelconque**

**Propriété :**

Soit *f* une fonction **continue** et négative sur un intervalle [ *a ; b* ].

***L’intégrale de a à b de la fonction f*** , notée est l’opposé de l’aire du domaine compris entre l’axe des abscisses , la courbe de *f* et les droites d’équation *x=a* et *x=b*.

Exemple : déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

**Vidéo** [**mathssa.fr/integration**](https://youtu.be/l2zuaZukc0g)

Représenter la droite d’équation dans un repère.

En déduire en effectuant des calculs d’aire.

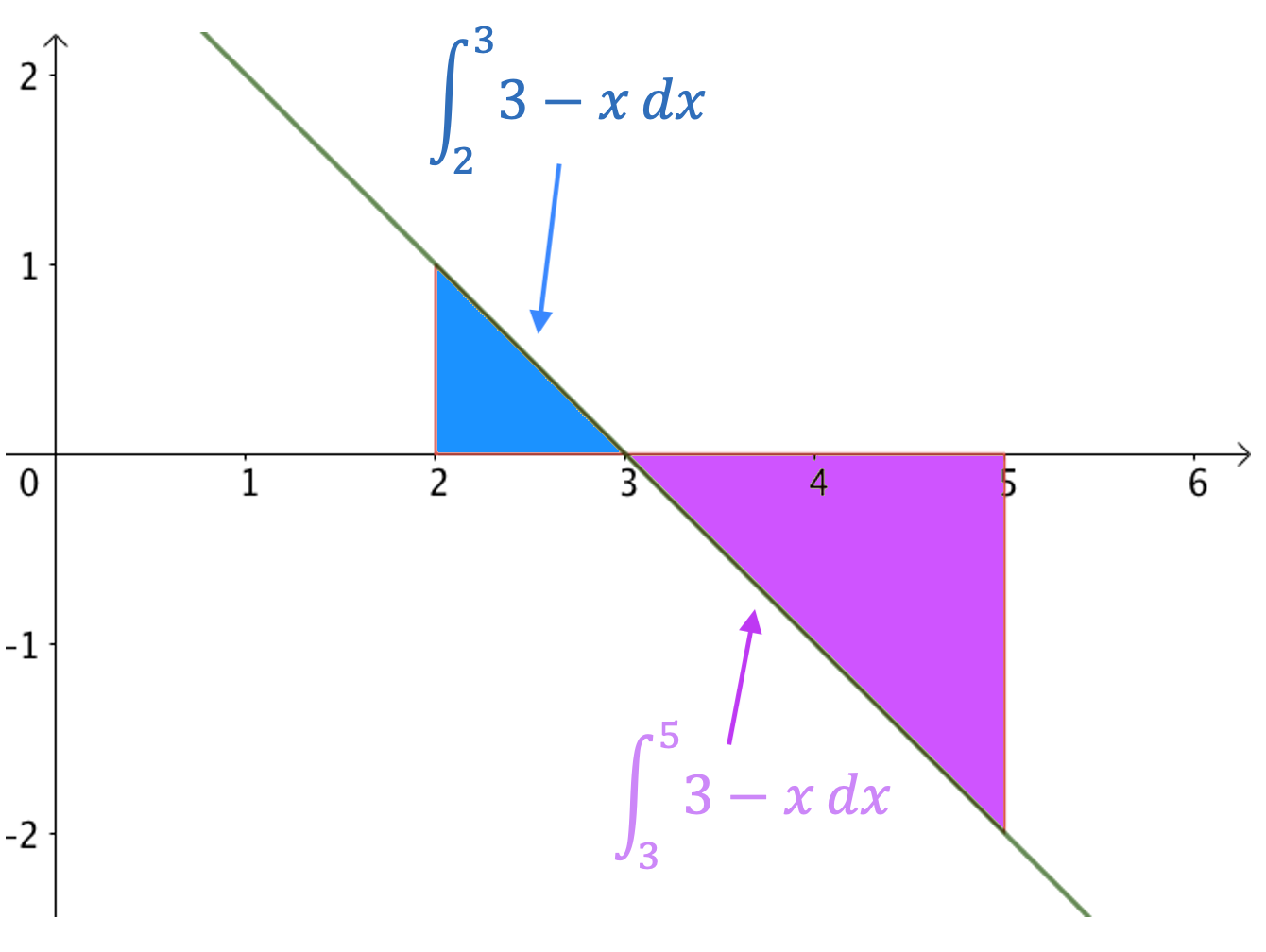
**Correction**

La droite d’équation coupe l’axe des abscisses en .

Donc, sur l’intervalle

Et, sur l’intervalle .

D’après la relation de Chasles, on a :



Donc :

Exercice : calculer

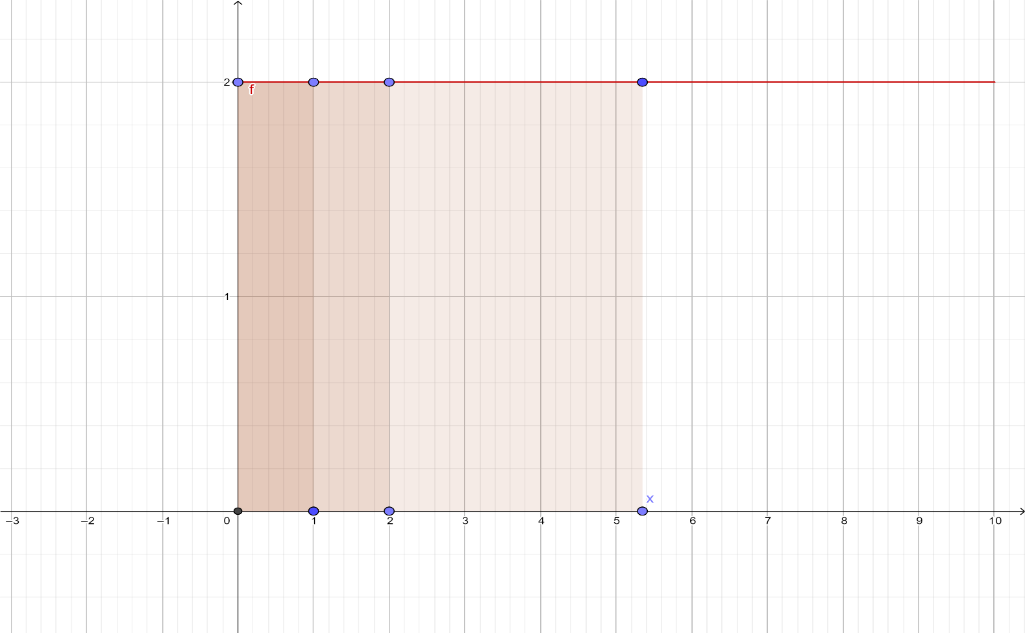
Une image contenant graphique

Description générée automatiquement

Or la fonction sinus étant impaire, on a

**5. Etude de la fonction intégrale d’une fonction continue positive**

|  |
| --- |
| **Définition :**  Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur [*a ;b*] .La fonction *F* définie sur [*a ;b*] par *F(x)=*est appelée **fonction intégrale** ou **fonction aire sous la courbe.** |



**Exemples :**

1.Soit *F* la fonction définie sur [0 ;+∞[ par

*F(x)= .*

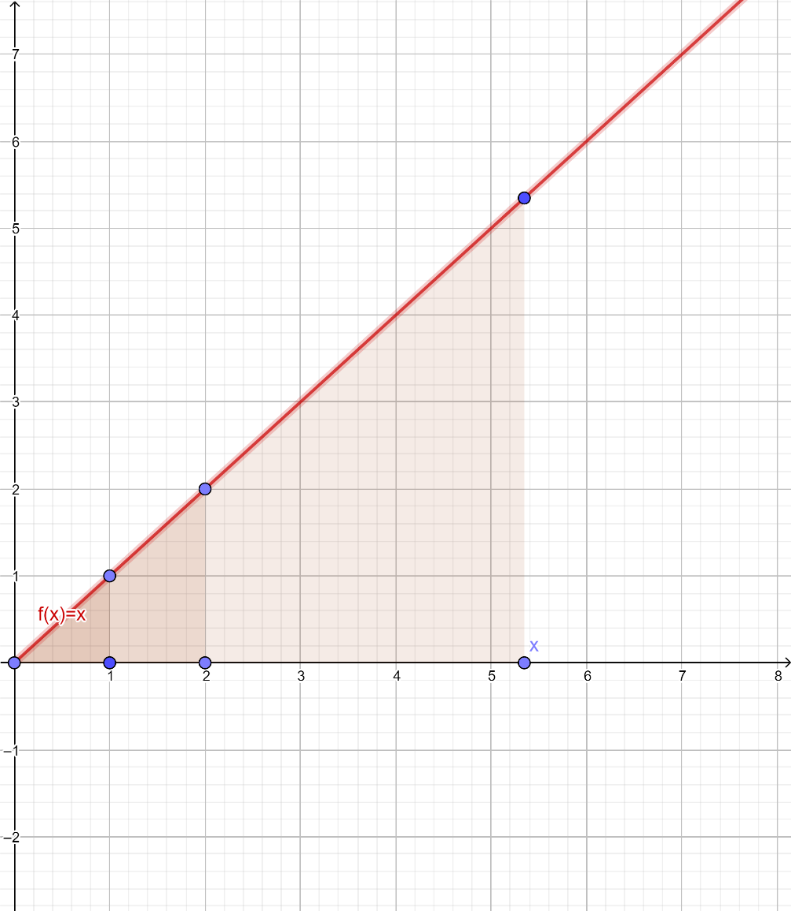
a)Donner *F(1)* et *F(2)*.

b)Déterminer l’expression de *F(x)* puis de *F’(x).*

a)F(1) = 2

F(2)= 4

*b)*

2.

Soit F la fonction définie sur [0 ;+∞[ par *F(x)= .*

a)Donner *F(1) et F(2).*

b)Déterminer l’expression de *F(x)* puis de *F’(x).*

a)F(1) = F(2)=

*b)F(x)=*

*F’(x)=*

|  |
| --- |
| **Théorème fondamental:**  Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur [*a ;b*] .La fonction *F* sur [*a ;b*] par *F(x)=*est dérivable sur[*a ;b*] de dérivée *f*.  **Conséquence importante**:  Toute fonction **continue positive** sur un intervalle admet des **primitives** (en particulier la fonction intégrale) |

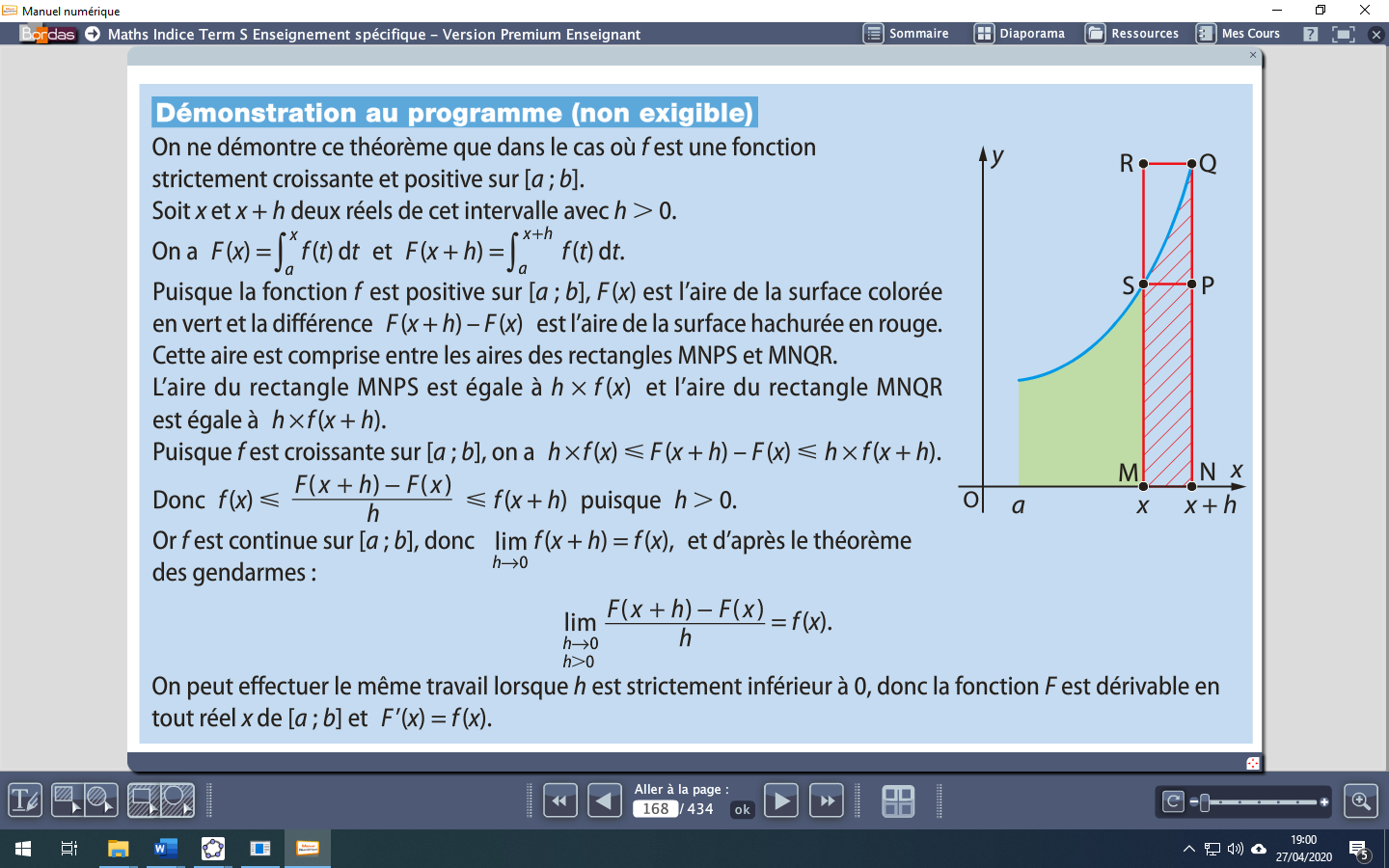
**Preuve :démonstration au programme vidéo : mathssa.fr/integraledemo**

**dans le cas où f est continue , positive et strictement croissante sur I=[*a ;b*]**

Soit F la fonction définie par *F(x)=*****

F est définie sur I car *f* est continue sur I.Soit *x* I, *h* un réel 0 tel que *x+ h* I.

Calculons le taux de variation de F entre *x* et *x+h* : **.**On suppose que *h>0.*



F(*x+h*) – F(*x*)

= aire sous la courbe de *f* entre *a* et *x+h* – aire sous la courbe de *f* entre *a* et *x*

= aire sous la courbe de *f* entre *x* et *x+h*

On peut encadrer cette aire par l’aire de 2 rectangles de hauteur *f(x)* et *f(x+h).*

Ainsi ,

Et

On admet que si *h<0*, l’encadrement reste valable.

Or car *f* est continue en *x*

D’après le théorème des Gendarmes, admet une limite finie égale à *f(x)* lorsque *h* tend

vers 0.On en conclut que F est dérivable en tout réel *x* de I et *F’(x)=f(x).*

**6. Théorème d’existence des primitives**

|  |
| --- |
| **Théorème d’existence :**  Toute fonction **continue** sur un intervalle [*a ;b*] admet des primitives . |

**Preuve :**

si *f* est continue sur un intervalle *[a ;b]* alors *f* admet un maximum M.

Soit *g* la fonction définie par

*g* est **continue** et **positive** sur *[a ;b]* (M est toujours ≥ *f(x))*

D’après la conséquence du théorème fondamental , *g* admet au moins une primitive G.

Or *f =M-g* . La fonction F qui à *x* associe est une primitive de *f.*

**IV-Calcul de l’intégrale d’une fonction continue**

**1.Intégrale d’une fonction continue et positive :**

**Propriété :**

Soit *f* une fonction **continue** **positive** sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I tels que *a<b.*

Alors =  où F est une primitive quelconque de *f* sur I.

(l’aire du domaine sous la courbe entre *a* et *b* est égal à *F(b)-F(a))*

**Remarques :**

* l’aire ne dépend pas du choix de la primitive *F*.
* se note aussi

**Démonstration : (dans le cas où *f* est positive)**

* Soit F la fonction définie sur [*a ;b*] par F(*x*) = donc

*F(b) – F(a) =***-=**

* Si G est une autre primitive de f sur I , alors G et F diffèrent d’une constante donc

( k réel) ainsi

**2.Généralisation de la notion d’intégrale d’une fonction continue:**

**Définition :**

Soit *f* une fonction **continue** sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I

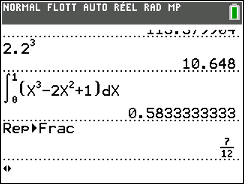
Alors = où F est une primitive quelconque de *f* sur I.

**Remarque :** de la définition précédente, découle la formule :

**Exercice :**

1. Calculer .

Soit la fonction définie sur par .



est continue sur donc admet des primitives. Une primitive de est la fonction définie sur par :

1. Calculer

Soit la fonction définie sur par

est continue sur donc admet des primitives. Une primitive de est la fonction



Pour tout réel de [-1 ;2],

1. Calculer

Soit la fonction définie sur par

est continue sur donc admet des primitives. Une primitive de est la fonction .



Pour tout réel de [0 ;2],

**3.Propriétés sur les bornes d’intégration :**

|  |
| --- |
| **Propriétés :** |

**Preuve :** Soit F une primitive de *f.*

a)

c)

**Exercice :**

Déterminer .

= (relation de Chasles)