CHAPITRE 8 – Primitives et intégrales

I-Rappels sur les équations différentielles

Vidéo :mathssa.fr/equadiff

1.Equation différentielle $y' = f$

Définition :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si pour tout x de I, $g'(x) = f(x)$.

2.Equation différentielle $y' = ay$

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle quelconque.

Exemple :résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 5y = 0$.

Correction

$3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \quad 3y' = -5y \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{5}{3}y$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif

3.Equation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$

Propriété :

La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$.

Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéos : mathssa.fr/equadif4 et tmathssa.fr/equadif5
On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 3$.
a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction

a) $2y' - y = 3 \Leftrightarrow \quad 2y' = y + 3 \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \qquad a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}$

● Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$ car $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3,\ C \in \mathbb{R}$$

$b)f$ est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3,\ C \in \mathbb{R}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = C - 3$

Or, $f(0) = -1 \Leftrightarrow C - 3 = -1 \Leftrightarrow \quad C = 3 - 1 = 2$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif2

3.Equation différentielle $y' = ay + f\ (a \neq 0)$

Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f\ (a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{ax} + p(x),\ \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière de l'équation $y' = ay + f$

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$ **Vidéo** mathssa.fr/equadif6

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction

a)Pour tout reel x, $p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

Donc : $p'(x) - 2p(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$= x^2$$

On a donc : $p'(x) - 2p(x) = x^2$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif3

II-Notions de primitives

Vidéo : mathssa.fr/primitivecours

1. Notion de primitives d'une fonction sur un intervalle

Une approche:

1.Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$.
Déterminer une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est f.

$F(x) = x^3 + x^2$ (en effet $F'(x) = 3x^2 + 2x$ F est ce qu'on appelle une primitive de f sur $\mathbb{R}$)

2.soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + e^x = 2 \times \frac{1}{x} + e^x$.

Déterminer une fonction F dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée est f.

La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ $F(x) = 2 \times \ln(x) + e^x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

En existe t-il d'autres ? La réponse est oui par exemple : $G(x) = 2 \times \ln(x) + e^x + 10$

$H(x) = 2 \times \ln(x) + e^x - 6$, … En fait , il en existe une infinité. Les primitives ont toutes la même structure . On les écrit sous la forme UNE PRIMITIVE + UNE CONSTANTE

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f, une fonction F dérivable sur I, telle que : $F' = f$.

Remarque : F est une primitive de f si et seulement si F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice : soit les deux fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{(3x^2-2x+3)e^{3x}}{(x^2+1)^2}$ et $F(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+1}$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$. en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $F = \frac{u}{v}$
- $u(x) = e^{3x}$ $v(x) = x^2 + 1$
  $u'(x) = 3e^{3x}$ $v'(x) = 2x$
- $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  Pour tout réel x,

  $F'(x) = \frac{3e^{3x}(x^2+1) - e^{3x}2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{3x}(3x^2+3-2x)}{(x^2+1)^2} = f(x)$

Comme $F' = f$ alors F est une primitive de f.

2. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Propriétés :

- Toute fonction continue f sur un intervalle I admet au moins une primitive F sur cet intervalle.
- On suppose que F est une **primitive** de f.

G est une **primitive** de f si et seulement si il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Preuve :

1er point : cf partie III

2ème point : vidéo : mathssa.fr/primitivedemo.html

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Conséquences :

- Deux primitives d'une même fonction f continue sur un intervalle I diffèrent d'une constante.
- On dit que l'ensemble des **primitives** d'une fonction continue f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- On suppose que f est continue sur I.

Soient x_0 un réel de I et y un réel . Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$

Remarque : il faudra faire attention au vocabulaire utilisé
Connaissant **une primitive** F de f, on pourra déterminer :

- **toutes** les **primitives** de f (ensemble des fonctions de la forme F+k où k ∈ ℝ)
- **la primitive** de la fonction f si on connaît l'image d'un réel par F.

Exemples :

$x \to ln(x)$ est une primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$x \to ln(x)$ est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Les fonctions du type $x \to ln(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont les primivites de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice : soit les deux fonctions suivantes définies sur $]0; +\infty[$

$f(x) = ln(x)$ et $F(x) = x(ln(x) - 1)$.

1.Démontrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2.Déterminer **la** primitive de f qui s'annule en 1.

1.F est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

- $F = uv$
- $u(x) = x \quad v(x) = ln(x) - 1$
  $u'(x) = 1 \quad v'(x) = \frac{1}{x}$
- $F' = u'v + uv'$
  Pour tout réel x de $]0; +\infty[$,
  $F'(x) = 1(\ln(x) - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x) = f(x)$

Comme $F' = f$ alors F est une primitive de f.

2.

- Les primitives de la fonction f sont les fonctions G définies sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x(ln(x) - 1) + k$ $(k \in \mathbb{R})$

- G(1)=0 nous permet d'écrire $1(\ln(1) - 1) + k = 0$ $soit$ $-1 + k = 0$ et $k = 1$

G(x)= $x(\ln(x) - 1) + 1$

3. Primitives de fonctions de référence

Fonction f	**Une primitive F**
$a,\ a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Propriété de linéarité des primitives :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :

$F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf, avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Exemples : déterminer une primitive à l'aide de la linéarité

vidéos : mathssa.fr/primitive , mathssa.fr/primitive2 et mathssa.fr/primitive3

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

d) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ e) $f(x) = -\sin(x)$ f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction

a) $f(x) = x^3 - 2$ donc $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ donc $F(x) = \frac{1}{-4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4}$

d) $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ donc $F(x) = 3\ln(x)$

e) $f(x) = -\sin(x)$ donc $F(x) = -(-\cos(x)) = \cos(x)$

f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

4.Primitives de fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u > 0$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Point méthode : pour déterminer une primitive d'une fonction f, il faut (à une constante près), écrire f sous la forme d'une dérivée du cours, identifier les fonctions intermédiaires puis utiliser les primitives des fonctions composées.

Exercice : Déterminer une primitive à l'aide des formules Vidéo :mathssa.fr/primitive4

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^2e^{x^3}$ b) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Correction

$a)f(x) = x^2e^{x^3}$ .f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet au moins une primitive F.

- $f = \frac{1}{3}u'e^u$
- $u(x) = x^3$ $u'(x) = 3x^2$ $(u'e^u = 3x^2e^{x^3})$
- $F = \frac{1}{3}e^u$
- Pour tout réel x, $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}$

$b)\ f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet au moins une primitive F.

- $f = u'u^2$

- $u(x) = x^2 - 5x + 4 \quad u'(x) = 2x - 5 \quad (u'u^2 = (2x-5)(x^2 - 5x + 4))$
- $F = \frac{u^3}{3}$
- Pour tout réel x, $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. f est continue sur ℝ donc admet au moins une primitive F.

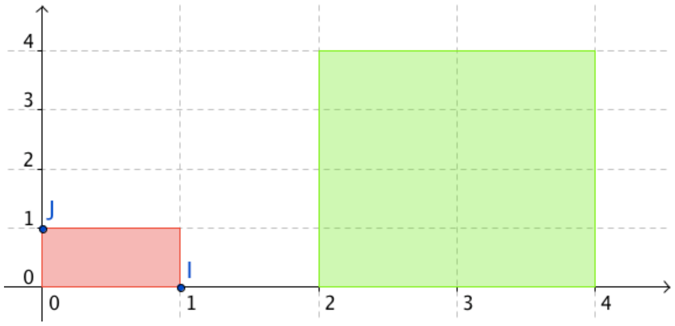
- $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
- $u(x) = x^2 + 1 \quad u'(x) = 2x \quad (\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}})$
- $F = \frac{1}{2}2\sqrt{u} = \sqrt{u}$
- Pour tout réel x, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

III-Notion d'intégrale d'une fonction continue

Vidéo :mathssa.fr/integralecours.html

1. Aire sous une courbe:

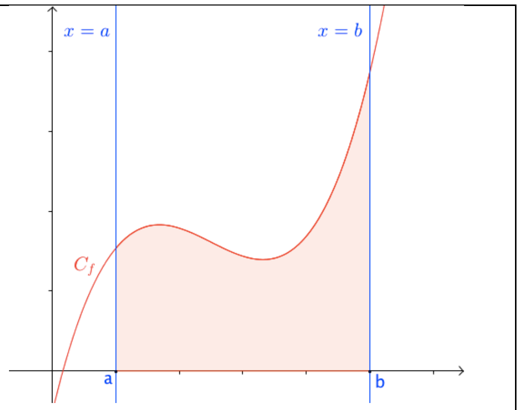
a)Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

b) Aire sous la courbe :

Définition :
Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [a ;b] de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
L'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'aire du domaine compris entre la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Cette aire s'exprime en **unité d'aire** (u.a.) ou en **cm².**

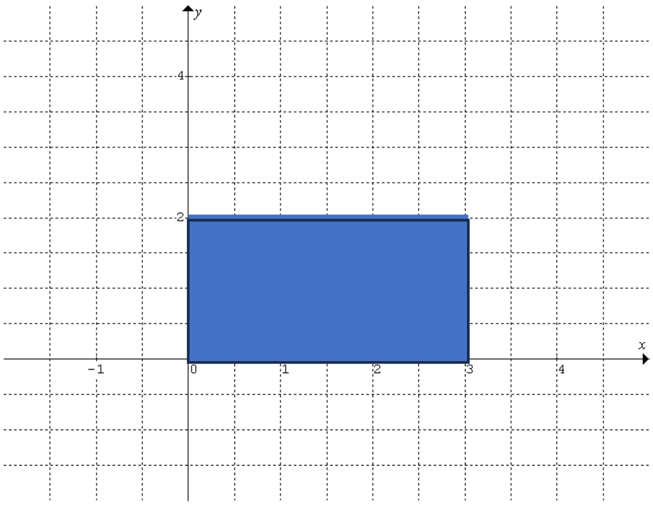


Remarque : la continuité garantit une certaine « régularité » du « bord » du domaine, ce qui permet d'expliquer l'existence de l'aire

Exemples :

- **1er exemple : fonction constante**

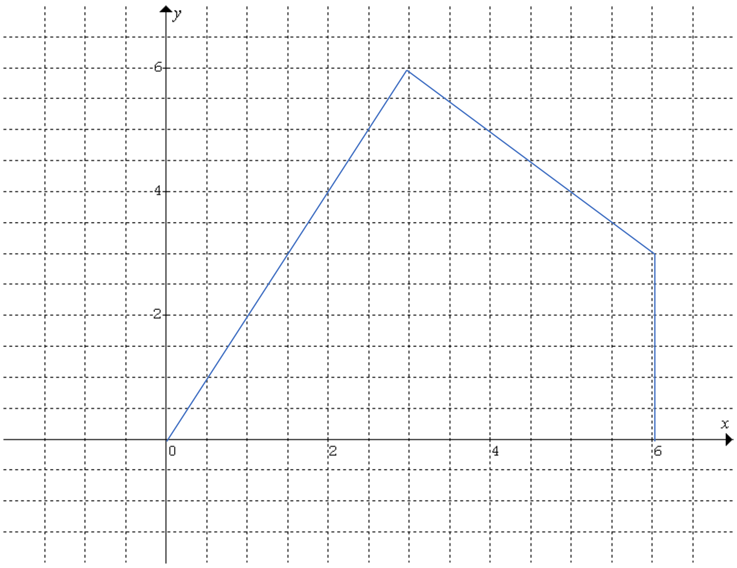
soit f la fonction définie sur [0 ;3] par $f(x)=2$



L'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'aire du rectangle de coté 2 et 3
A= 2×3 =6 u. a.

- **2ème exemple : fonction affine par morceau**

soit f la fonction définie sur [0 ;6] par $f(x)=2x$ sur [0 ;3] et $f(x)=9-x$ sur [3 ;6]



L'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'aire d'un triangle rectangle de coté 3 et 6 plus l'aire d'un trapèze de bases 3 ,6 et de hauteur 3.

$A=\frac{3\times6}{2}+\frac{(3+6)3}{2}=9+13{,}5=22{,}5$ u. a.

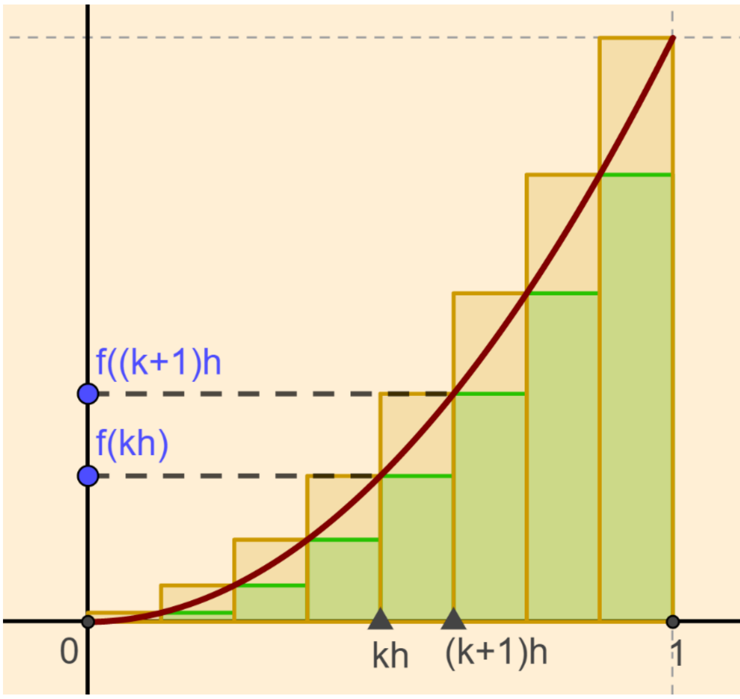
2.Approcher l'aire sous une courbe par somme d'aire de rectangles

Soit $f : x \longmapsto x^2$ sur [0 ; 1].

Soit D le domaine sous la courbe C.

On veut déterminer un encadrement de l'aire A de D.

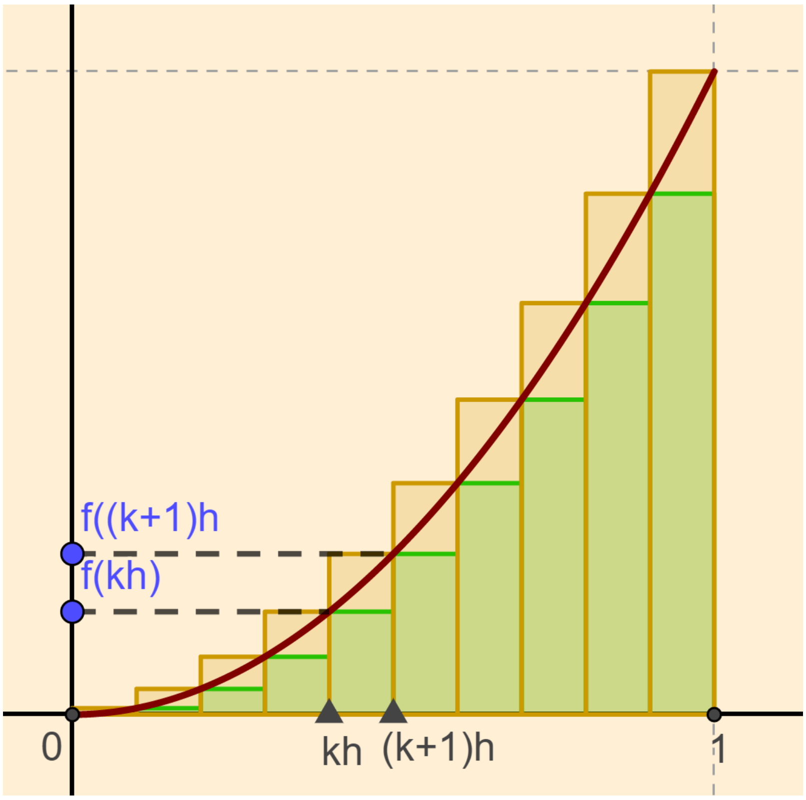
Idée :approcher l'aire A par des sommes d' aires de rectangles



→ on subdivise l'intervalle [*0 ;1*] en *n* intervalles de longueur $h = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

→ sur chaque intervalle de longueur h :
$[kh; (k+1)h]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit : le rectangle « inférieur » R_k de hauteur $f(kh)$ et le rectangle « supérieur » R'_k de hauteur $f((k+1)h)$

La somme des aires des rectangles « inférieurs » est notée *u* , celle des rectangles supérieurs est notée *v*.
L'aire sous la courbe A sera comprise entre *u* et *v*.



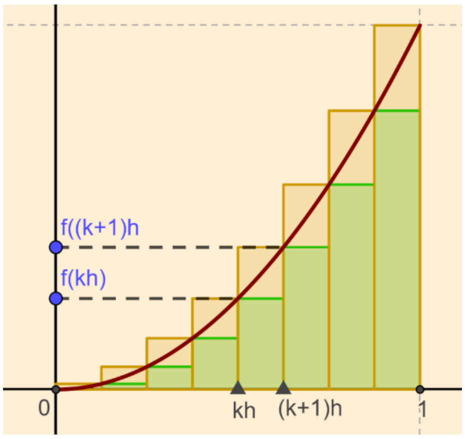
Faisons le tableau d'état des variables lorsque n=10. Puis complétons le programme ci-dessous.

n	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
h	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u	0+0,1f(0) =0	0+0,1f(0,1) =0,001	0,001+0,1f(0,2) =0,005	0,005+0,1f(0,3) =0,014	0,0014+0,1f(0,4) =0,030	0,0014+0,1f(0,5) =0,055	0,0014+0,1f(0,6) =0,091	0,091+0,1f(0,7) =0,140	0,140+0,1f(0,8) =0,204	0,204+0,1f(0,9) =0,285
v	0+0,1f(0,1) =0,001	0,001+0,1f(0,2) =0,005	0,005+0,1f(0,3) =0,014	0,0014+0,1f(0,4) =0,030	0,0014+0,1f(0,5) =0,055	0,0055+0,1f(0,6) =0,091	0,091+0,1f(0,7) =0,140	0,140+0,1f(0,8) =0,204	0,204+0,1f(0,9) =0,285	0,285+0,1f(1) =0,385

L'aire est comprise entre 0,285 et 0,385 ua

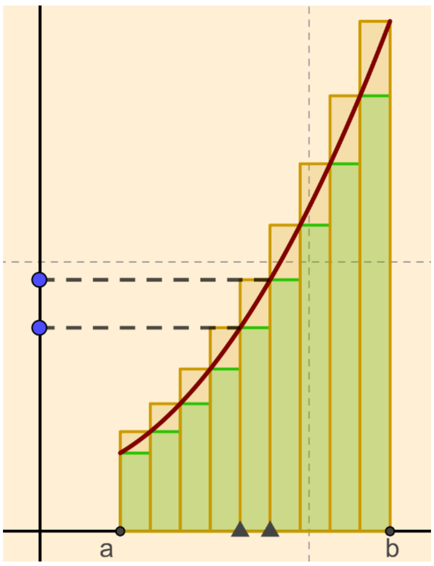
```python
from math import*
def f(x):
    return(x**2)

def rectangle(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range(0,n):
        u=u+h*f(x)
        x=x+h
        v=v+h*f(x)
    return(u,v)
```

```
>>> rectangle(0,1,1000)
(0.33283350000000095, 0.33383350000000095)
>>>
```



Encadrer l'aire sous la courbe de la fonction *f* définie sur [0,3 ;1,3] par $f(x)=x^2+0,2$

```
>>> rectangle(0.3,1.3,1000)
(0.9225334999999877, 0.9241334999999876)
>>>
```



Ecrire un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de l'aire sous la courbe en utilisant non plus un rectangle supérieur ou inférieur mais un trapèze. Programmer cet algorithme sur EduPython.

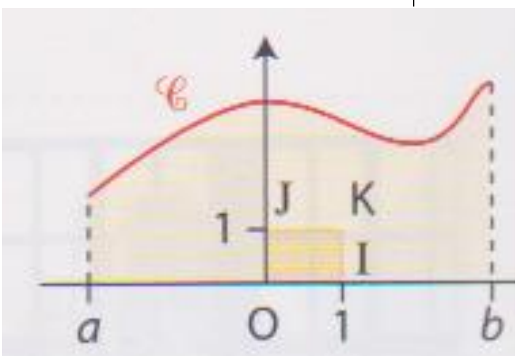
```
from math import*
def f(x):
    return(x**2)

def trapeze(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range(0,n):
        u=u+h*(f(x)+f(x+h))/2
        x=x+h
    return(u)
```

Console Python

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, 15:08:03)
bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> rectangle(0.3,1.3,1000)
(0.9225334999999877, 0.9241334999999876)
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> trapeze(0,1,1000)
0.33333350000000034
>>>
```

3.Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive

Définition :
Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [a ; b].
Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$).
L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle OIKJ (rectangle de coté 1)



L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Cette aire est aussi appelée « **aire du domaine sous la courbe de f entre a et b** »

Remarques :

- le symbole $\int$ est un « S » stylisé (le S signifiant Somme) pour rappeler la méthode d'obtention de l'intégrale par somme d'aires de rectangles de dimensions $f(x)$ et dx
- la variable x est « muette », ce qui signifie qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$
- L'intégrale d'une fonction continue positive est positive

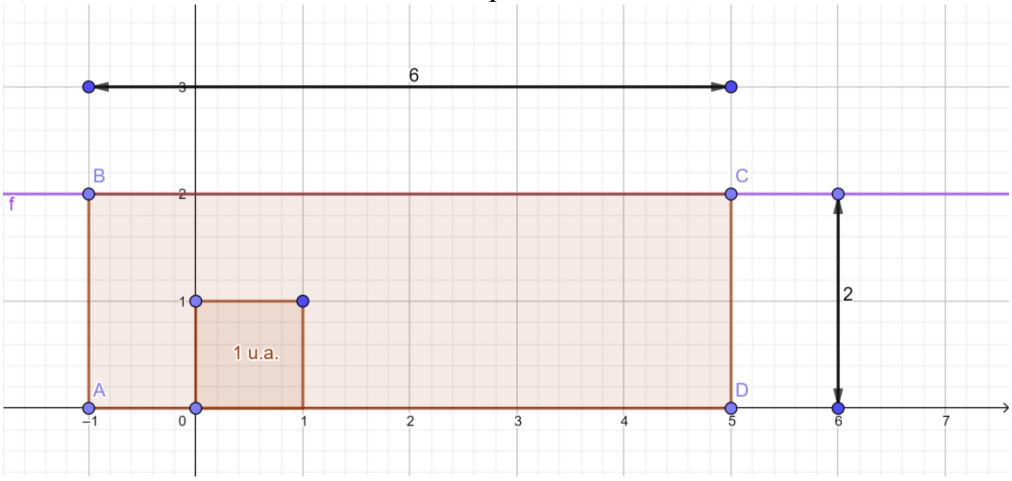
Propriétés immédiates :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- **Relation de Chasles**

Pour tous réels $a \leq b \leq c$, $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

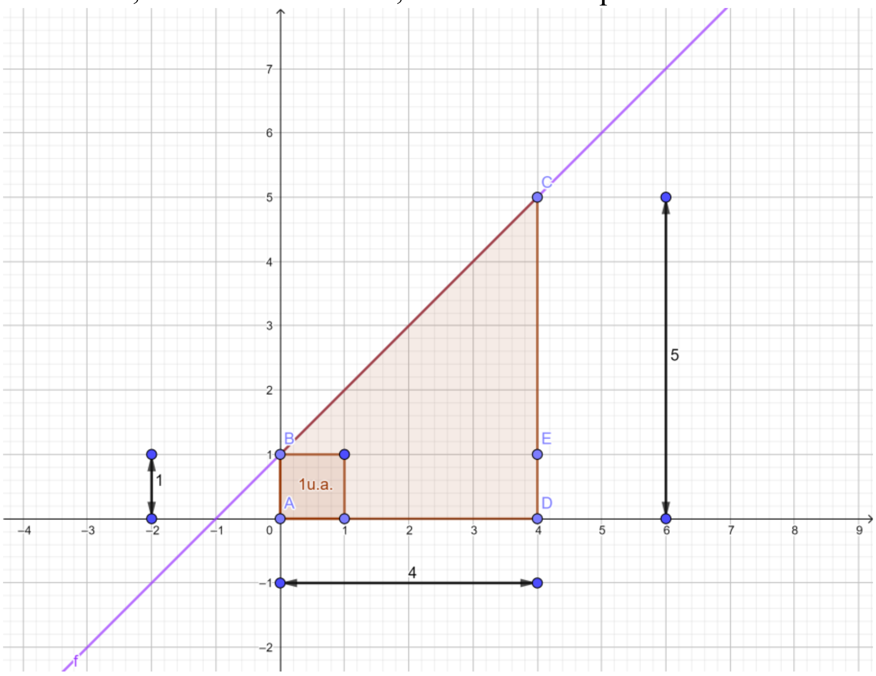
Remarques :
* la relation de Chasles traduit une simple sommation d'aires…
* par convention (pour l'instant), $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

- $\int_{-1}^{5} 2dx$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de la fonction constante égale à 2 , l'axe des abscisses , les droites d'équation *x=-1* et *x=5*.



C'est l'aire du rectangle ABCD. $\int_{-1}^{5} 2dx = 2 \times 6 = 12$

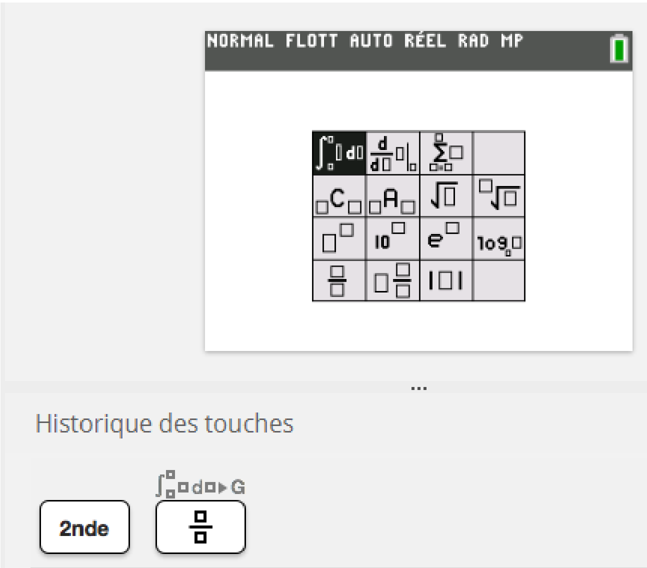
- $\int_{0}^{4} (x+1)dx$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de la fonction *f* définie par $f(x) = x + 1$, l'axe des abscisses , les droites d'équation *x=0* et *x=4*.

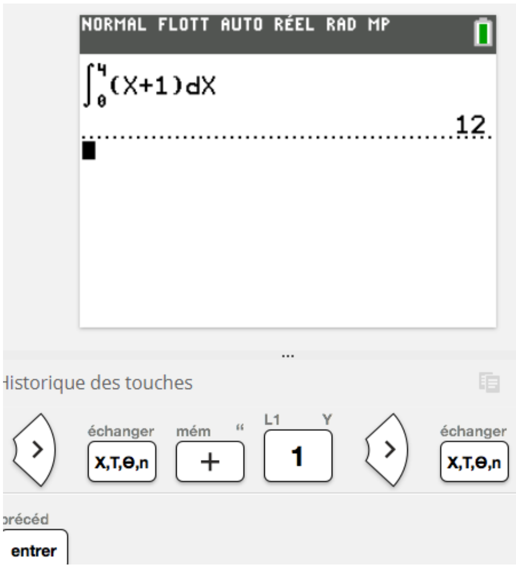


C'est l'aire du trapèze rectangle ABCD. $\int_{0}^{4} (x+1)dx = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(5+1)\times 4}{2} = 12$(c'est aussi l'aire du rectangle ABED plus l'aire du triangle rectangle BEC soit $4 + \frac{4\times 4}{2} = 12$)

<u>Avec la calculatrice :</u> on cherche à calculer $\int_0^4 (x+1)dx$

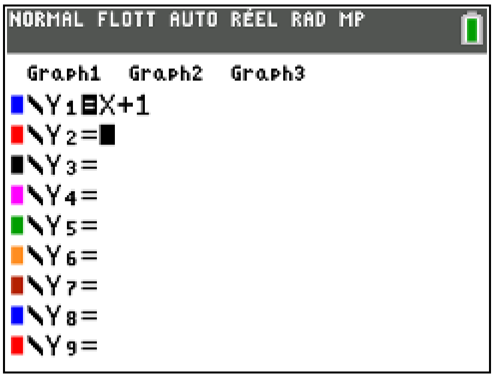
- **<u>Soit à l'aide d'un calcul :</u>**



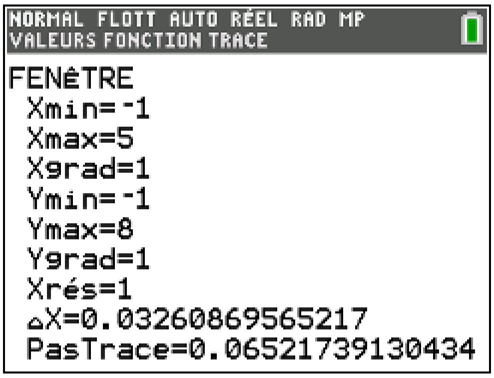


- **<u>Soit à l'aide de la représentation graphique</u>**

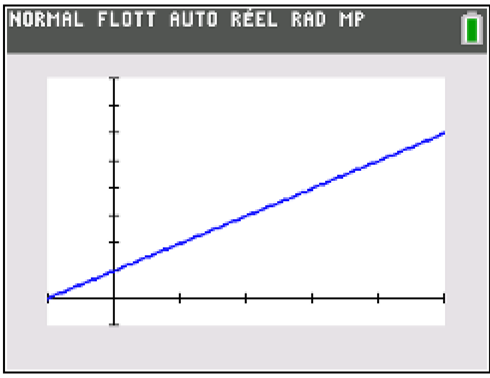
f(x)



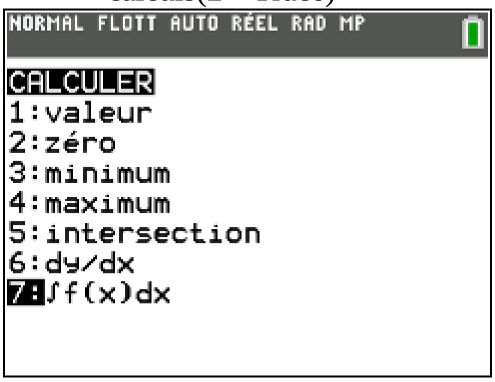
fenêtre



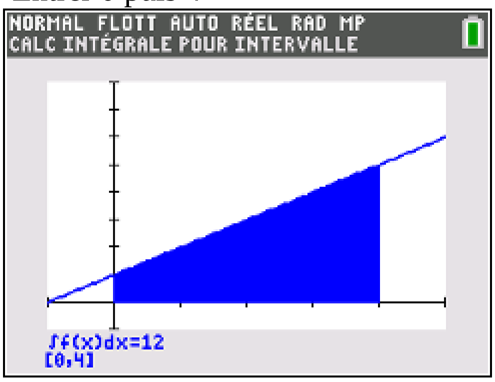
Graph



calculs(2^{nd} Trace)



Entrer 0 puis 4



4.Extension aux fonctions de signe quelconque

Propriété :

Soit *f* une fonction **continue** et négative sur un intervalle [*a* ; *b*].

L'intégrale de a à b de la fonction f , notée $\int_b^a f(x)\,dx$est l'opposé de l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe de *f* et les droites d'équation *x*=*a* et *x*=*b*.

Exemple : déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

Vidéo **mathssa.fr/integration**

Représenter la droite d'équation $y = 3 - x$ dans un repère.

En déduire $\int_2^5 3 - x\,dx$ en effectuant des calculs d'aire.

Correction

La droite d'équation $y = 3 - x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.

Donc, $3 - x \geq 0$ sur l'intervalle [2 ; 3]

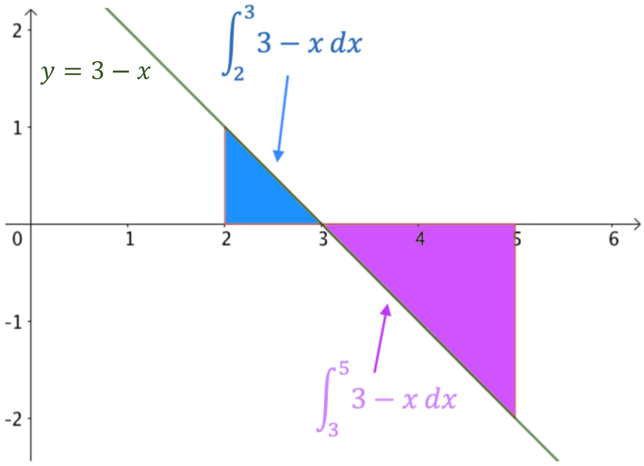
Et, $3 - x \leq 0$ sur l'intervalle [3 ; 5].

D'après la relation de Chasles, on a :

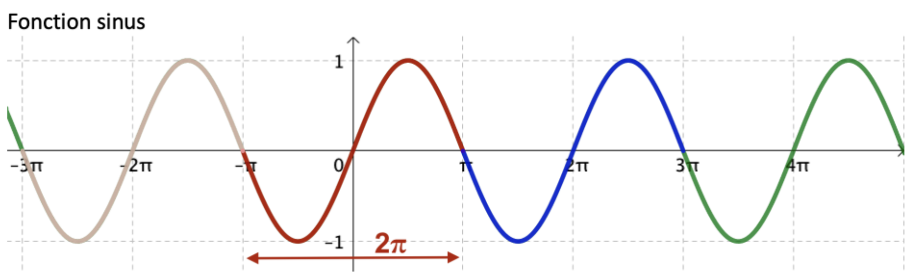
$$\int_2^5 3 - x\,dx = \int_2^3 3 - x\,dx + \int_3^5 3 - x\,dx$$

Donc :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \frac{1 \times 1}{2} + \left(-\frac{2 \times 2}{2}\right)$$
$$= -1{,}5$$



Exercice : calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$



$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

Or la fonction sinus étant impaire, on a $\int_{-\pi}^{0} \sin(x)dx = -\int_0^{\pi} \sin(x)dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 0$

5. Etude de la fonction intégrale d'une fonction continue positive

Définition :

Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur [*a* ;*b*] .La fonction *F* définie sur [*a* ;*b*] par *F(x)*= $\int_a^x f(t)dt$ est appelée **fonction intégrale** ou **fonction aire sous la courbe.**

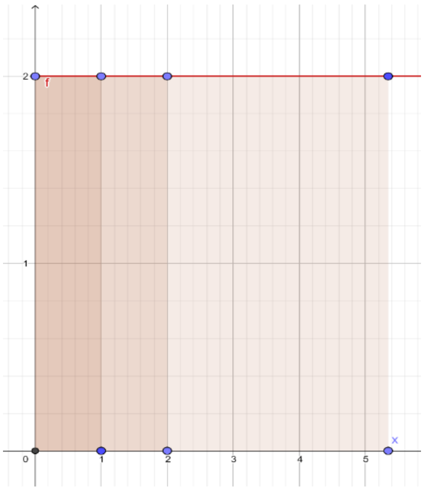
Exemples :

1.Soit F la fonction définie sur [0 ;+∞[par

$F(x)= \int_0^x 2dt$.

a)Donner $F(1)$ et $F(2)$.

b)Déterminer l'expression de $F(x)$ puis de $F'(x)$.



a)F(1) = 2

F(2)= 4

$b)F(x) = 2x$

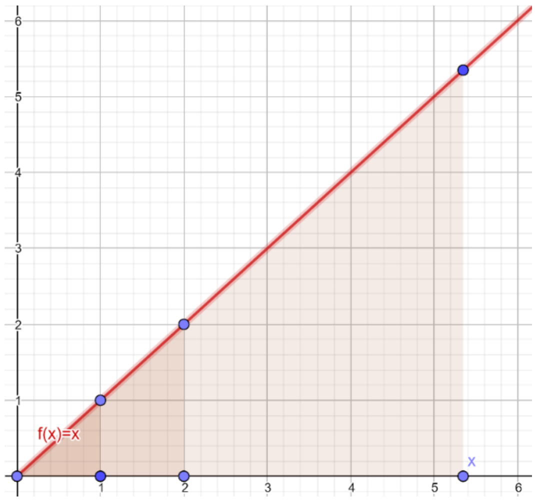
$F'(x) = 2 = f(x)$

2.

Soit F la fonction définie sur [0 ;+∞[par $F(x)= \int_0^x tdt$.

a)Donner $F(1)$ et $F(2)$.

b)Déterminer l'expression de $F(x)$ puis de $F'(x)$.



a)F(1) = $\frac{1}{2}$ F(2)= $\frac{4}{2} = 2$

$b)F(x)= \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$

$F'(x)= \frac{1}{2} \times 2x = x = f(x)$

Théorème fondamental:

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a ;b]$ .La fonction F sur $[a ;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a ;b]$ de dérivée f.

Conséquence importante :

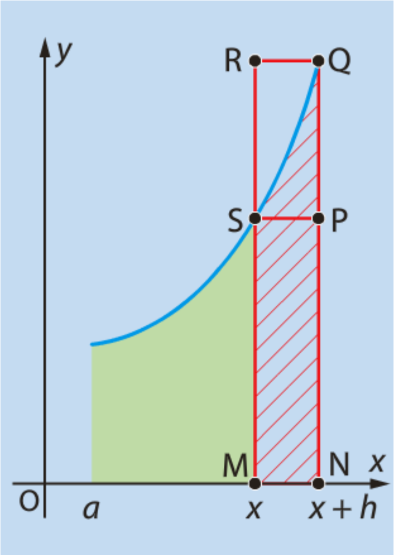
Toute fonction **continue positive** sur un intervalle $[a ; b]$ admet des **primitives** (en particulier la fonction intégrale)

Preuve :démonstration au programme vidéo : mathssa.fr/integraledemo dans le cas où f est continue , positive et strictement croissante sur I=[a ;b]

Soit F la fonction définie par $F(x)= \int_a^x f(t)dt$

F est définie sur I car f est continue sur I.Soit $x \in$ I, h un réel $\neq 0$ tel que $x + h \in$ I.

Calculons le taux de variation de F entre x et $x+h$: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.On suppose que $h>0$.



F(x+h) – F(x)
= aire sous la courbe de f entre a et x+h – aire sous la courbe de f entre a et x

= aire sous la courbe de f entre x et x+h

On peut encadrer cette aire par l'aire de 2 rectangles de hauteur $f(x)$ et $f(x+h)$.

Ainsi , $h\,f(x) \leq\ F(x+h) - F(x)\ \leq h\,f(x+h)$

Et $f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$

On admet que si $h<0$, l'encadrement reste valable.

Or $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ car f est continue en x
D'après le théorème des Gendarmes, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ admet une limite finie égale à $f(x)$ lorsque h tend
vers 0.On en conclut que F est dérivable en tout réel x de I et $F'(x)=f(x)$.

6. Théorème d'existence des primitives

Théorème d'existence :
Toute fonction **continue** sur un intervalle [a ;b] admet des primitives .

Preuve :
si f est continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors f admet un maximum M.
Soit g la fonction définie par $g(x) = M - f(x)$.
g est **continue** et **positive** sur $[a\,;b]$ (M est toujours ≥ $f(x)$)
D'après la conséquence du théorème fondamental , g admet au moins une primitive G.
Or $f = M - g$. La fonction F qui à x associe $F(x) = Mx - G(x)$ est une primitive de f.

IV-Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

1.Intégrale d'une fonction continue et positive :

Propriété :
Soit f une fonction **continue positive** sur un intervalle I, a et b deux réels de I tels que $a<b$.

Alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

(l'aire du domaine sous la courbe entre a et b est égal à $F(b)$-$F(a)$)

Remarques :

- l'aire ne dépend pas du choix de la primitive F.
- $F(b) - F(a)$ se note aussi $[\boldsymbol{F(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$

Démonstration : (dans le cas où *f* est positive)

- Soit F la fonction définie sur [a ;b] par F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ donc

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

- Si G est une autre primitive de f sur I , alors G et F diffèrent d'une constante donc

$G = F + k$ (k réel) ainsi
$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$

2.Généralisation de la notion d'intégrale d'une fonction continue:

Définition :
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, a et b deux réels de I

Alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

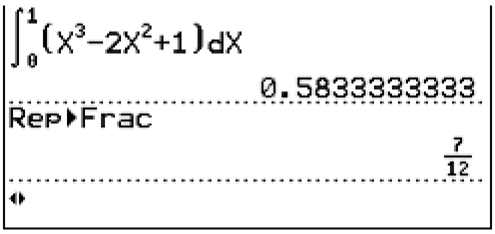
Remarque : de la définition précédente, découle la formule : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Exercice :

1. Calculer $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 1)dx$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

f est continue sur [0 ; 1] donc admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F définie sur [0 ; 1] par : $F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 2\frac{x^{2+1}}{2+1} + x = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x$



$$\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{2\times 1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{2\times 0^3}{3} + 0\right)$$
$$= \frac{7}{12}$$

2. Calculer $\int_{-1}^{2} e^{-2x+4}dx$

Soit f la fonction définie sur [−1 ; 2] par $f(x) = e^{-2x+4}$
f est continue sur [−1 ; 2] donc admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F

- $f = -\frac{1}{2}u'e^u$
- $u(x) = -2x + 4$ $u'(x) = -2$ $(u'e^u = -2e^{-2x+4})$
- $F = -\frac{1}{2}e^u$

Pour tout réel x de [-1 ;2], $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+4}$

$$\int_{-1}^{2} e^{-2x+4} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+4}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}e^{-2\times 2+4} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2\times(-1)+4}\right) = -\frac{1}{2}e^{0} + \frac{1}{2}e^{6}$$
$$= \frac{e^6 - 1}{2}$$

3. Calculer $\int_0^2 \frac{x}{2x^2+1} dx$

Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$.
f est continue sur [0 ; 2] donc admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F.

- $f = \frac{1}{4}\frac{u'}{u}$
- $u(x) = 2x^2 + 1$ $\quad u'(x) = 4x$ $\quad (\frac{u'}{u} = \frac{4x}{x^2+1})$
- $F = \frac{1}{4}\ln(u)$

Pour tout réel x de [0 ;2], $F(x) = \frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1)$

$$\int_0^2 \frac{x}{2x^2+1} dx = \left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2\times 2^2 + 1) - \frac{1}{4}\ln(2\times 0^2 + 1)$$
$$= \frac{1}{4}\ln(9) - \frac{1}{4}\ln(1) \quad or\ \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3)$$

3.Propriétés sur les bornes d'intégration :

Propriétés :

$a)$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$c)$ Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Preuve : Soit F une primitive de *f*.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

$b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$

c)$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Exercice :

Déterminer $I = \int_0^1 e^x dx + \int_1^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$.

$$I = \int_0^1 e^x dx + \int_1^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$= \int_0^4 e^x dx$ (relation de Chasles)

$= [e^x]_0^4 \quad = e^4 - e^0 \quad = e^4 - 1$