**CHAPITRE 9 – Variables aléatoires et loi des grands nombres**

**I-Sommes de variables aléatoires - échantillon**

**1. Somme de variables aléatoires**

Vidéo :[mathssa.fr/sommeva](https://youtu.be/GweMOVratYI) (jusqu’à 6mns)

Exemple :

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et 2.

- pour le second jeu, par la variable aléatoire qui prend les valeurs –2, 3 et 4.

Par exemple, l’évènement signifie qu’on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.

Considérons la variable aléatoire somme donnant le gain total cumulé aux deux jeux.

Alors la variable aléatoire peut prendre les valeurs :

-1, 0, 4, 5 et 6.

En effet, on a par exemple avec .

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l’évènement , on cherche toutes les sommes égales à 5.

On a ainsi :

Si de plus, les évènements et sont indépendants, alors on a :

**Définition :**

Soit et deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme est donnée par :

Si, de plus, les évènements et sont indépendants, alors on a :

On dit dans ce cas que les **variables aléatoires et sont indépendantes**.

Exemple :

Si par exemple, alors :

Exercice: Déterminer la loi d’une somme de variables aléatoires

**Vidéo** mathssa.fr/sommeva2

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.

- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €.

Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.

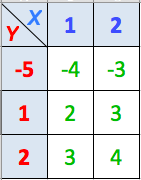
La variable aléatoire désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire désigne les gains à la 2e partie.

On considère que les variables aléatoires et sont indépendantes.

Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

**Correction**

Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :



Ainsi, on a :

en effet, les variables et sont indépendantes.

On peut présenter la loi de probabilité de dans un tableau :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –4 | –3 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

**2. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires**

Vidéo :[mathssa.fr/sommeva](https://youtu.be/GweMOVratYI) (de la 6ème minute à la 8ème minute)

**Propriétés :**

● avec et

●

● avec et

● Si et sont deux variables aléatoires indépendantes :

Exemple : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

**Vidéo** mathssa.fr/sommeva3

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,298 | 1,299 | 1,3 | 1,301 | 1,302 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de .

**Correction**

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire .

La loi de probabilité de est alors :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de :

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de :

Donc :

Donc :

Et donc :

Conclusion : et .

**3. Echantillon d’une loi de probabilité – application à la loi binomiale**

Vidéo :[mathssa.fr/sommeva](https://youtu.be/GweMOVratYI) (à partir de la 8ème minute à la 8ème minute)

**Définition :**

Un **échantillon de taille d’une loi de probabilité** est une liste de variables aléatoires **indépendantes** suivant cette loi.

**Propriétés :**

Soit un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : , alors on a :



Échantillon de la loi de Bernoulli

**Propriété :**

Soit un échantillon de taille de la loi de Bernoulli de paramètre .

La variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres et .

**Propriété :**

Soit une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres et .

Démonstration au programme :

**Vidéo** mathssa.fr/sommevademo

Soit un échantillon de taille de la loi de Bernoulli de paramètre .

On rappelle que pour une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli, on a :

et .

Donc, on a :

car sont indépendants.

Donc :

**Exemple : somme de variables aléatoires indépendantes**

On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables modélisent la note obtenue à l’examen par chacun d’entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ;0,615) .

Soit S la variable définie par : .

Calculer l’espérance E(S) et la variance V(S) de la variable aléatoire S.

**Correction :**

V.

est un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

On a : , alors on a :



**II-LOI DES GRANS NOMBRES**

**1.Moyenne d’un échantillon**

Vidéo : [**mathssa.fr/loigrandsnombres**](https://youtu.be/_ZzxgjAxrt4) (jusqu’à la 10ème minute)

Exemple :

On lance un dé à six faces et on considère la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le dé s’arrête sur un chiffre pair et la valeur 0 sinon.

suit donc une loi de Bernoulli de paramètre .

On répète deux fois de suite cette expérience. On considère alors l’échantillon de taille 2 de variables aléatoires et suivant la même loi que .

Il est ainsi possible d’évaluer le résultat d’une telle expérience en étudiant la variable aléatoire moyenne de et

On appelle la variable aléatoire moyenne de l’échantillon

Alors peut prendre les valeurs suivantes :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valeur de | Probabilité de | Valeur de | Probabilité de | Probabilité de | Valeur de | Probabilité de |
| 0 |  | 0 |  |  |  |  |
| 0 |  | 1 |  |  |  |  |
| 1 |  | 0 |  |  |  |
| 1 |  | 1 |  |  |  |  |

Et on a ainsi la loi de probabilité de  :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Définition** :

Soit un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

**La variable aléatoire moyenne** de l’échantillon est donnée par :

Exemple :

On reprend l’exemple précédent.

- Calculons l’espérance de  :

On retrouve l’espérance de la variable .

On comprend intuitivement que l’espérance de la variable aléatoire moyenne d’un échantillon est égale à l’espérance de la variable aléatoire associée à cet échantillon.

- Calculons la variance de  :

Alors que :

Ainsi la variance de la variable aléatoire moyenne est plus faible que la variance de la variable d’origine.

De plus, la dispersion de la variable aléatoire moyenne diminue au fur et à mesure que la taille de l’échantillon augmente.

En effet, si l’échantillon devient plus grand, le nombre de situations pouvant donner des valeurs proches de l’espérance augmente.

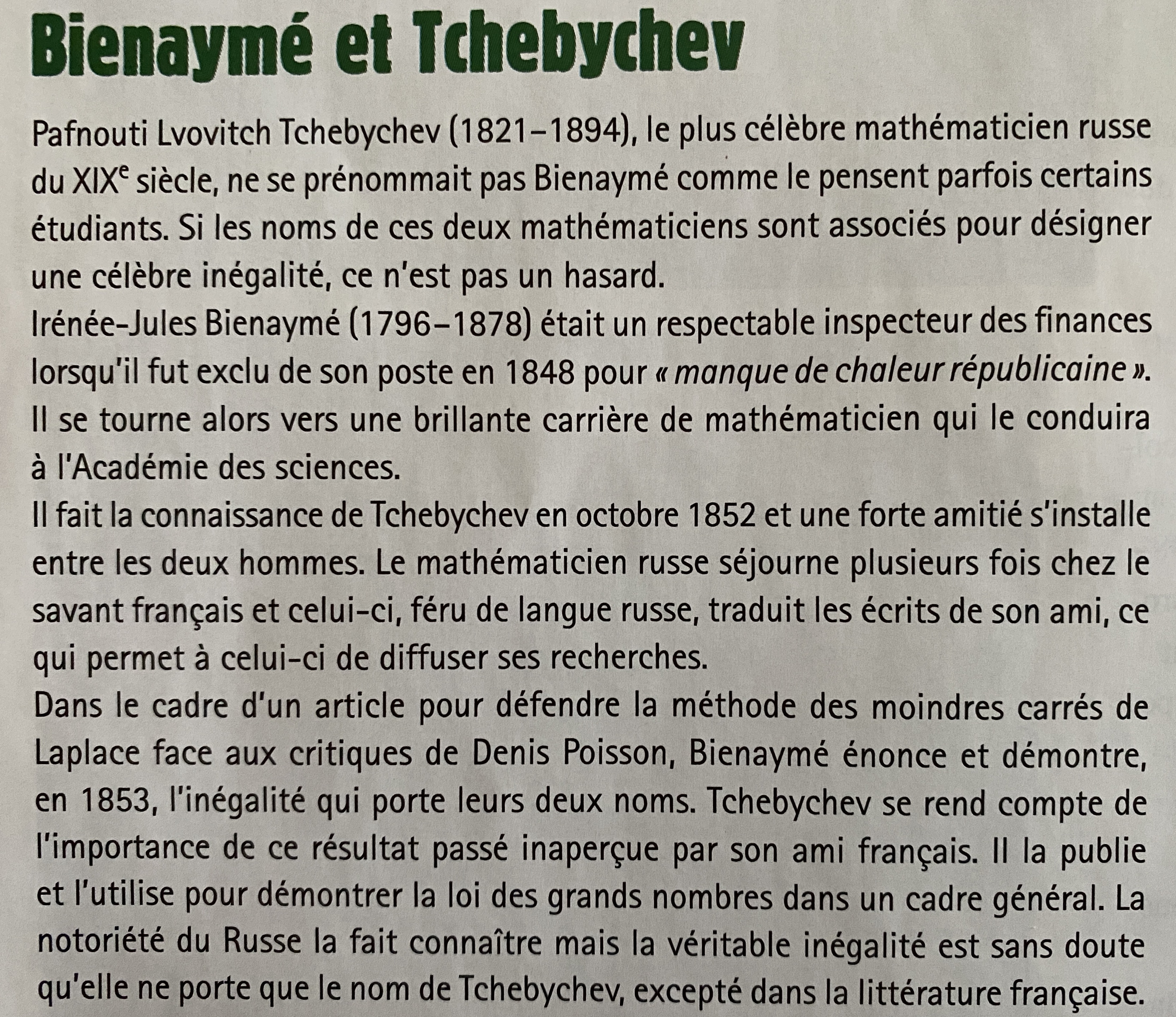
Ainsi, les valeurs prises par la moyenne deviennent de plus en plus probables dans un voisinage de l’espérance.

**Propriété :**

Soit une variable aléatoire et soit un échantillon de taille de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que .

**2.Inégalité de** **Bienaymé-Tchebychev**

Vidéo : [**mathssa.fr/loigrandsnombres**](https://youtu.be/_ZzxgjAxrt4) (de la 10ème minute à la 18ème minute)



**Propriété : inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit une variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

Méthode : Appliquer l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Vidéo** mathssa.fr/loigrandsnombres2.html

Soit une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres et .

1) Appliquer l’inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec Interpréter.

2) Recommencer avec , puis . Que constate-t-on ?

**Correction**

1)

Ainsi, on obtient :

Ou encore :

La probabilité que l’écart de à soit supérieur à est majorée par 0,25.

2) ● pour  :

Ou encore :

● pour  :

Ou encore :

● On peut en déduire que les écarts de à de quelques deviennent improbables.

**Exemple : inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables modélisent la note obtenue à l’examen par chacun d’entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi .Soit S la variable définie par : . On admet que et

On considère la variable aléaroire

a) Que modélise M dans le contexte de l’exercice ?Justifier que E(M)=12,3 et V(M)=0,47355.

b)A l’aide de l’inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, justifier l’affirmation ci-dessous :

« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d’au moins 80% ».

**Correction :**

a)La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un échantillon de 10 étudiants choisis au hasard. *et*

b)On applique l’inégalité de **Bienaymé-Tchebychev pour** :

On utilise l’évènement contraire :

« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d’au moins 80% ».

**3.Inégalité de concentration**

Vidéo : [**mathssa.fr/loigrandsnombres**](https://youtu.be/_ZzxgjAxrt4) (de la 18ème minute à la 26ème minute)

**Propriété :**

Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

Exemple : Appliquer l’inégalité de concentration pour déterminer la taille d’un échantillon

**Vidéo** [**mathssa.fr/concentration**](https://youtu.be/7Nk9U-zwWOA)

Soit une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.

On considère un échantillon de variables aléatoires suivant la loi de .

On appelle la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

Déterminer la taille de l’échantillon tel que la probabilité que la moyenne appartienne à l’intervalle soit supérieure à 0,95.

**Correction**

On cherche à calculer tel que

Dans l’idée d’appliquer l’inégalité de concentration, on fait apparaitre l’espérance de dans l’inégalité.Or,

Ainsi, on cherche tel que :

Soit :

Soit encore :

Et donc, en considérant l’évènement contraire :

En prenant dans l’inégalité de concentration, on a :

, avec .

Or,

On cherche donc un entier tel que :

Et donc :

Pour , la probabilité que la moyenne appartienne à l’intervalle est supérieure à 0,95.

**4.Loi des grands nombres**

Vidéo : [**mathssa.fr/loigrandsnombres**](https://youtu.be/_ZzxgjAxrt4) (à partir de la 26ème minute)

**Propriété :**

Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire . Pour tout réel strictement positif , on a :

Remarque : La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l’échantillon d’une variable aléatoire est grande, plus l’écart entre la moyenne de cet échantillon et l’espérance de la variable aléatoire est faible.

Méthode : Appliquer la loi des grands nombres

**Vidéo** mathssa.fr/loigrandsnombres3

Soit une variable aléatoire d’espérance 3 et de variance 0,2.

Soit la variable aléatoire moyenne d’un échantillon de taille de la variable aléatoire .

1) Déterminer un majorant de pour , pour , puis pour 0. Que constate-t-on ?

2) Démontrer et interpréter le résultat précédent.

**Correction**

1) D’après l’inégalité de concentration, on a :

Soit, dans le contexte de l’exercice :

● Pour on a :

● Pour on a :

● Pour on a :

On constate que plus augmente, plus le majorant de la probabilité se rapproche de 0.

2) D’après la loi des grands nombres, on a :

Soit, dans le contexte de l’exercice :

Plus la taille de l’échantillon est grande, plus l’écart entre la moyenne et l’espérance est faible.