CHAPITRE 9 – Variables aléatoires et loi des grands nombres

I-Sommes de variables aléatoires - échantillon

1. Somme de variables aléatoires

Vidéo :mathssa.fr/sommeva (jusqu'à 6mns)

Exemple :
On considère deux jeux dont les gains sont donnés :
- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs –2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.
Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.
Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs :
-1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on cherche toutes les sommes $X + Y$ égales à 5.
On a ainsi : $P(X + Y = 5) = P\big((X = 1) \cap (Y = 4)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$

Si de plus, les évènements X et Y sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \times P(Y = 4) + P(X = 2) \times P(Y = 3)$$

Définition :
Soit X et Y deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$
Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i) \times P(Y = j)$$
On dit dans ce cas que les **variables aléatoires X et Y sont indépendantes**.

Exemple :
Si par exemple, $k = 2$ alors :
$$P(X + Y = 2) = \sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j))$$
$$= P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 0))$$

Exercice: Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

Vidéo mathssa.fr/sommeva2

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :
- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €.
Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.
La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2e partie.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Correction
Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :

Y \ X	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

Ainsi, on a :

$$P(S=-4) = P((X=1)\cap(Y=-5))$$
$$= P(X=1)\times P(Y=-5) \text{ en effet, les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S=-3) = P(X=2)\times P(Y=-5)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S=2) = P(X=1)\times P(Y=1)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(S=3) = P(X=1)\times P(Y=2) + P(X=2)\times P(Y=1)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(S=4) = P(X=2)\times P(Y=2)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-4	-3	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

2. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires
Vidéo :mathssa.fr/sommeva (de la 6ème minute à la 8ème minute)

Propriétés :
- $E(aX+b) = aE(X)+b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

Exemple : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Vidéo mathssa.fr/sommeva3

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Correction
Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

y_i	–2	–1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y) = -2 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}1$
$V(Y) = 0{,}2 \times (-2-0{,}1)^2 + 0{,}1 \times (-1-0{,}1)^2 + 0{,}2 \times (0-0{,}1)^2 + 0{,}4 \times (1-0{,}1)^2$
$+0{,}1 \times (2-0{,}1)^2$
$= 1{,}69$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000E(X) - 1300$
Donc : $E(X) = \dfrac{E(Y)+1300}{1000} = \dfrac{0{,}1+1300}{1000} = 1{,}3001$
$V(Y) = V(1000X - 1300) = 10002\, V(X)$
Donc : $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2} = \dfrac{1{,}69}{1000^2}$
Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1{,}69}{1000^2}} = \dfrac{1{,}3}{1000} = 0{,}0013$
Conclusion : $E(X) = 1{,}3001\ cm$ et $\sigma(X) = 0{,}0013\ cm$.

3. Echantillon d'une loi de probabilité – application à la loi binomiale

Vidéo :mathssa.fr/sommeva (à partir de la 8ème minute à la 8ème minute)

Définition :

Un **échantillon de taille n d'une loi de probabilité** est une liste de n variables aléatoires **indépendantes** suivant cette loi.

Propriétés :

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :

- $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
- $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Échantillon de la loi de Bernoulli

Propriété :

Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété :

Soit S une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$E(S) = np$ $\qquad$ $V(S) = np(1-p)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration au programme :

Vidéo mathssa.fr/sommevademo

Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
On rappelle que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, on a :
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.
Donc, on a :
$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$
$V(S) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ car $X_1, X_2, \dots X_n$ sont indépendants.
Donc : $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots = p(1-p) = np(1-p)$

Exemple : somme de variables aléatoires indépendantes

On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ;0,615) .
Soit S la variable définie par : $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance E(S) et la variance V(S) de la variable aléatoire S.

Correction :

$E(N_i) = 20 \times 0{,}615 = 12{,}3$, V$(N_i) = 20 \times 0{,}615 \times (1 - 0{,}615) = 4{,}7355$.
$(N_1, N_2, \dots, N_{10})$ est un échantillon de taille 10 de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

On a : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 12{,}3 + 12{,}3 + \cdots + 12{,}3 = 123$
- $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4{,}735 = 47{,}355$

II-LOI DES GRANS NOMBRES

1.Moyenne d'un échantillon

Vidéo : mathssa.fr/loigrandsnombres (jusqu'à la 10ème minute)

Exemple :

On lance un dé à six faces et on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le dé s'arrête sur un chiffre pair et la valeur 0 sinon.

X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On répète deux fois de suite cette expérience. On considère alors l'échantillon (X_1, X_2) de taille 2 de variables aléatoires X_1 et X_2 suivant la même loi que X.

Il est ainsi possible d'évaluer le résultat d'une telle expérience en étudiant la variable aléatoire moyenne de X_1 et X_2.

On appelle M_2 la variable aléatoire moyenne de l'échantillon (X_1, X_2).

Alors M_2 peut prendre les valeurs suivantes :

Valeur de X_1	Probabilité de X_1	Valeur de X_2	Probabilité de X_2	Probabilité de (X_1, X_2)	Valeur de M_2	Probabilité de M_2
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{0+0}{2} = 0$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$	
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1+1}{2} = 1$	$\frac{1}{4}$

Et on a ainsi la loi de probabilité de M_2 :

k	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(M_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Définition :

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

La variable aléatoire moyenne M_n de l'échantillon est donnée par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).$$

Exemple :

On reprend l'exemple précédent.

- Calculons l'espérance de M_2 :

$$E(M_2) = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

On retrouve l'espérance de la variable X.
On comprend intuitivement que l'espérance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est égale à l'espérance de la variable aléatoire X associée à cet échantillon.

- Calculons la variance de M_2 :

$$V(M_2) = \frac{1}{4} \times \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

Alors que :

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ainsi la variance de la variable aléatoire moyenne est plus faible que la variance de la variable d'origine.
De plus, la dispersion de la variable aléatoire moyenne diminue au fur et à mesure que la taille de l'échantillon n augmente.
En effet, si l'échantillon devient plus grand, le nombre de situations pouvant donner des valeurs proches de l'espérance augmente.
Ainsi, les valeurs prises par la moyenne deviennent de plus en plus probables dans un voisinage de l'espérance.

<u>Propriété :</u>
Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X.

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

2.Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Vidéo : **mathssa.fr/loigrandsnombres** (de la 10ème minute à la 18ème minute)

Bienaymé et Tchebychev

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821–1894), le plus célèbre mathématicien russe du XIXe siècle, ne se prénommait pas Bienaymé comme le pensent parfois certains étudiants. Si les noms de ces deux mathématiciens sont associés pour désigner une célèbre inégalité, ce n'est pas un hasard.
Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878) était un respectable inspecteur des finances lorsqu'il fut exclu de son poste en 1848 pour *« manque de chaleur républicaine »*. Il se tourne alors vers une brillante carrière de mathématicien qui le conduira à l'Académie des sciences.
Il fait la connaissance de Tchebychev en octobre 1852 et une forte amitié s'installe entre les deux hommes. Le mathématicien russe séjourne plusieurs fois chez le savant français et celui-ci, féru de langue russe, traduit les écrits de son ami, ce qui permet à celui-ci de diffuser ses recherches.
Dans le cadre d'un article pour défendre la méthode des moindres carrés de Laplace face aux critiques de Denis Poisson, Bienaymé énonce et démontre, en 1853, l'inégalité qui porte leurs deux noms. Tchebychev se rend compte de l'importance de ce résultat passé inaperçue par son ami français. Il la publie et l'utilise pour démontrer la loi des grands nombres dans un cadre général. La notoriété du Russe la fait connaître mais la véritable inégalité est sans doute qu'elle ne porte que le nom de Tchebychev, excepté dans la littérature française.

<u>Propriété : inégalité de Bienaymé-Tchebychev</u>
Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :
$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$
<u>Méthode :</u> Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Vidéo mathssa.fr/loigrandsnombres2.html

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.
1) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.
2) Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$, puis $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?

Correction
1) $E(X) = 20 \times 0{,}1 = 2$ $\quad V(X) = 20 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 1{,}8$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{1{,}8}$
Ainsi, on obtient :
$$P(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{\left(2\sigma(X)\right)^2}$$
Ou encore : $\quad P(|X - 2| \geq 2\sqrt{1{,}8}) \leq 0{,}25$

La probabilité que l'écart de X à $E(X)$ soit supérieur à $2\sigma(X)$ est majorée par 0,25.

2) ● <u>pour $\delta = 3\sigma(X)$:</u>
$$P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{\left(3\sigma(X)\right)^2}$$
Ou encore : $\quad P(|X - 2| \geq 3\sqrt{1{,}8}) \leq \frac{1}{9}$

● <u>pour $\delta = 4\sigma(X)$:</u>
$$P(|X - E(X)| \geq 4\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{\left(4\sigma(X)\right)^2}$$
Ou encore : $\quad P(|X - 2| \geq 4\sqrt{1{,}8}) \leq 0{,}0625$

● On peut en déduire que les écarts de X à $E(X)$ de quelques σ deviennent improbables.

Exemple : inégalité de Bienaymé-Tchebychev
On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi .Soit S la variable définie par : $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$. On admet que $E(S) = 123$ et $V(S) = 47{,}355$
On considère la variable aléaroire $M = \frac{S}{10}$.
a) Que modélise M dans le contexte de l'exercice ?Justifier que E(M)=12,3 et V(M)=0,47355.
b)A l'aide de l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, justifier l'affirmation ci-dessous :
« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

<u>Correction :</u>

a)La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un échantillon de 10 étudiants choisis au hasard.$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12{,}3 \quad et \quad V(M) = (\frac{1}{10})^2 V(S) = 0{,}47355$
b)On applique l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev pour** $\delta = 2$:
$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$
$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq \frac{0{,}47355}{4}$
$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq 0{,}1183875$
On utilise l'évènement contraire :
$1 - P(|M - 12{,}3| < 2) \leq 0{,}1183875$
$P(|M - 12{,}3| < 2) \geq 0{,}8816125$
$P(10{,}3 < M < 14{,}3) \geq 0{,}8816125$
« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

3.Inégalité de concentration

Vidéo : **mathssa.fr/loigrandsnombres** (de la 18ème minute à la 26ème minute)

Propriété :

Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$$

Exemple : Appliquer l'inégalité de concentration pour déterminer la taille d'un échantillon

Vidéo **mathssa.fr/concentration**

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle]0,03 ; 0,37[soit supérieure à 0,95.

Correction

On cherche à calculer n tel que $P(0{,}03 < M_n < 0{,}37) \geq 0{,}95$
Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaitre l'espérance de X dans l'inégalité.Or, $E(X) = p = 0{,}2$
Ainsi, on cherche n tel que : $P(0{,}03 - 0{,}2 < M_n - 0{,}2 < 0{,}37 - 0{,}2) \geq 0{,}95$

Soit : $P(-0{,}17 < M_n - 0{,}2 < 0{,}17) \geq 0{,}95$

Soit encore : $P(|M_n - 0{,}2| < 0{,}17) \geq 0{,}95$

Et donc, en considérant l'évènement contraire :

$$1 - P(|M_n - 0{,}2| \geq 0{,}17) \geq 0{,}95$$
$$P(|M_n - 0{,}2| \geq 0{,}17) \leq 0{,}05$$

En prenant $\delta = 0{,}17$ dans l'inégalité de concentration, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq 0{,}05, \text{ avec } \frac{V(X)}{n\,\delta^2} = 0{,}05.$$

Or, $V(X) = p(1-p) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
On cherche donc un entier n tel que : $\frac{0{,}16}{n\,0{,}17^2} \leq 0{,}05$

Et donc : $n \geq \frac{0{,}16}{0{,}05 \times 0{,}17^2} \approx 110{,}7$
Pour $n \geq 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0{,}37[$ est supérieure à 0,95.

4.Loi des grands nombres

Vidéo : **mathssa.fr/loigrandsnombres** (à partir de la 26ème minute)

Propriété :
Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

Remarque : La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Méthode : Appliquer la loi des grands nombres

Vidéo mathssa.fr/loigrandsnombres3

Soit une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 0,2.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
1) Déterminer un majorant de $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1)$ pour $n = 100$, pour $n = 1000$, puis pour $n = 10\,000$. Que constate-t-on ?
2) Démontrer et interpréter le résultat précédent.

Correction
1) D'après l'inégalité de concentration, on a :
$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$
Soit, dans le contexte de l'exercice :
$P(|M_n - 3| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}2}{n \times 0{,}1^2} = \frac{20}{n}$
- Pour $n = 100$, on a : $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1) \leq 0{,}2$
- Pour $n = 1000$, on a : $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1) \leq 0{,}02$
- Pour $n = 10000$, on a : $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1) \leq 0{,}002$

On constate que plus n augmente, plus le majorant de la probabilité se rapproche de 0.

2) D'après la loi des grands nombres, on a :
$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$
Soit, dans le contexte de l'exercice :
$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - 3| \geq 0{,}1) = 0$

Plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'écart entre la moyenne et l'espérance est faible.