**Devoir maison numéro 1 pour le 23/09/24**

**Exercice 1 : suite arithmétique - contextualisation**

Pierre se constitue une tirelire afin d’acheter un vélo qui coute 183,75 €.

Après un dépôt initial dans cette tirelire de 8 euros, il décide qu’à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée augmentera de 2 euros par rapport à celle du mois précédent.

On note le dépôt initial et  la somme déposée à la fin du nième mois.

On obtient ainsi une suite ().

1. Donner sans justifier et

2.Exprimer en fonction de .

3.En déduire la nature de la suite () ainsi que l’expression de en fonction de .

4.a) Quelle somme contiendra la tirelire au bout de deux mois ?

b) Démontrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de mois est

.

5.Au bout de combien de mois, Pierre pourra t’il casser sa tirelire et s’acheter son vélo. Justifier.

**Exercice 2 :étude de la monotonie**

Démontrer que la suite définie par est décroissante.

**Exercice 3 :étude d’une suite arithmético-géométrique**

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu’il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume. On appelle le volume en litres stocké le *nième* samedi de tonte.

On a .Calculer V2 et V3.

1. Pour tout entier , exprimer en fonction de.

2.On définit, pour tout entier, le nombre par .Démontrer que la suite est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.

3. Exprimeren fonction de *n* et en déduire l’expression de en fonction de *n*.

4.Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ?

**Exercice 4 :**

Soit la suite définie par (*n* entier naturel)

1. Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel *n* , .

2. Démontrer de deux façons différentes que la suite *u* est décroissante.

**Exercice 5 : il suffira d’un signe …**

Le but de l’exercice est de prouver que pour tout réel , .

Soit la fonction définie sur par

La dérivabilité des fonctions est admise dans cet exercice.

1.Pour tout réel , donner dans justifier

2.Résoudre dans l’équation puis en déduire le tableau de variations de la fonction .

3.Déduire de la question précédente le signe de puis prouver que pour tout réel ,

4. Pour les volontaires

Soit une fonction **quelconque** 2 fois dérivables sur de courbe représentative Cf .En s’inspirant de la méthode précédente , démontrer que si pour tout réel alors Cf est au-dessus de sa tangente au point d’abscisse 2.

Remarque : 2 est arbitraire . Le résultat est vrai si on remplace 2 par un réel

**Exercices 6 :**

****

****

**Correction du devoir maison numéro 1**

**Exercice 5 : il suffira d’un signe …**

Le but de l’exercice est de prouver que pour tout réel , .

1.Pour tout réel ,

2. S=]0 ;+∞[

puis en déduire le tableau de variations de la fonction .

3.Déduire de la question précédente le signe de puis prouver que pour tout réel ,

4. Pour les volontaires

Soit une fonction **quelconque** 2 fois dérivables sur de courbe représentative Cf .En s’inspirant de la méthode précédente , démontrer que si pour tout réel alors Cf est au-dessus de sa tangente au point d’abscisse 2.

Remarque : 2 est arbitraire . Le résultat est vrai si on remplace 2 par un réel

**Exercice 6 : (5 points)**

1.Dans C2, on écrit « =B2+2\*A2^2+3\*A2+5 »

Dans B3, on écrit « =2\*B2+2\*A2^2-A2 »

2.Il semble bien que v soit géométrique de raison 2.

**1ère stratégie : montrer que *v* est géométrique de raison 2**

Pour tout entier *n* , montrons que *vn+1 = 2vn.*

Pour tout entier *n* , *vn+1 = un+1  +2(n+1)²+3(n+1)+5*

*= un+1 +2(n²+2n+1)+3n+3+5*

*= un+1 +2n²+7n+10 or un+1  = 2un + 2n²-n*

*= 2un + 2n²-n +2n²+7n+10*

*= 2un + 4n²+6n+10*

*= 2(un + 2n²+3n+5)*

*= 2vn.*

v est donc géométrique de premier terme *v0 = 7* de raison *q=2.*

Ainsi pour tout entier n, *vn = v0qn = * *(0,75 point)*

Or *un + 2n²+3n+5 = vn* ainsi *un = vn -2n²-3n-5* soit un =  *(0,75 point)*

**2ème stratégie : raisonner par récurrence**

**On se doute que vn =** .

Démontrons le par récurrence.

Soit *P(n)* la proposition de récurrence «  » ( *n* entier naturel).

* 1ère étape : montrons que P(0) est vraie.  ***(initialisation)***

 et  .Donc **v0 =** .

* 2ème étape : montrons que pour tout entier naturel n , si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie. ***(hérédité)***

Hypothèses :  , *un+1  = 2un + 2n²-n* et  *vn =un + 2n²+3n+5*

But : montrer que 

*vn+1 =un+1 + 2(n+1)²+3(n+1)+5*

*= un+1 +2(n²+2n+1)+3n+3+5*

*= un+1 +2n²+7n+10*

*= 2un + 2n²-n* *+2n²+7n+10*

*= 2(un + 2n²+3n+5)*

*= 2vn.*

= 

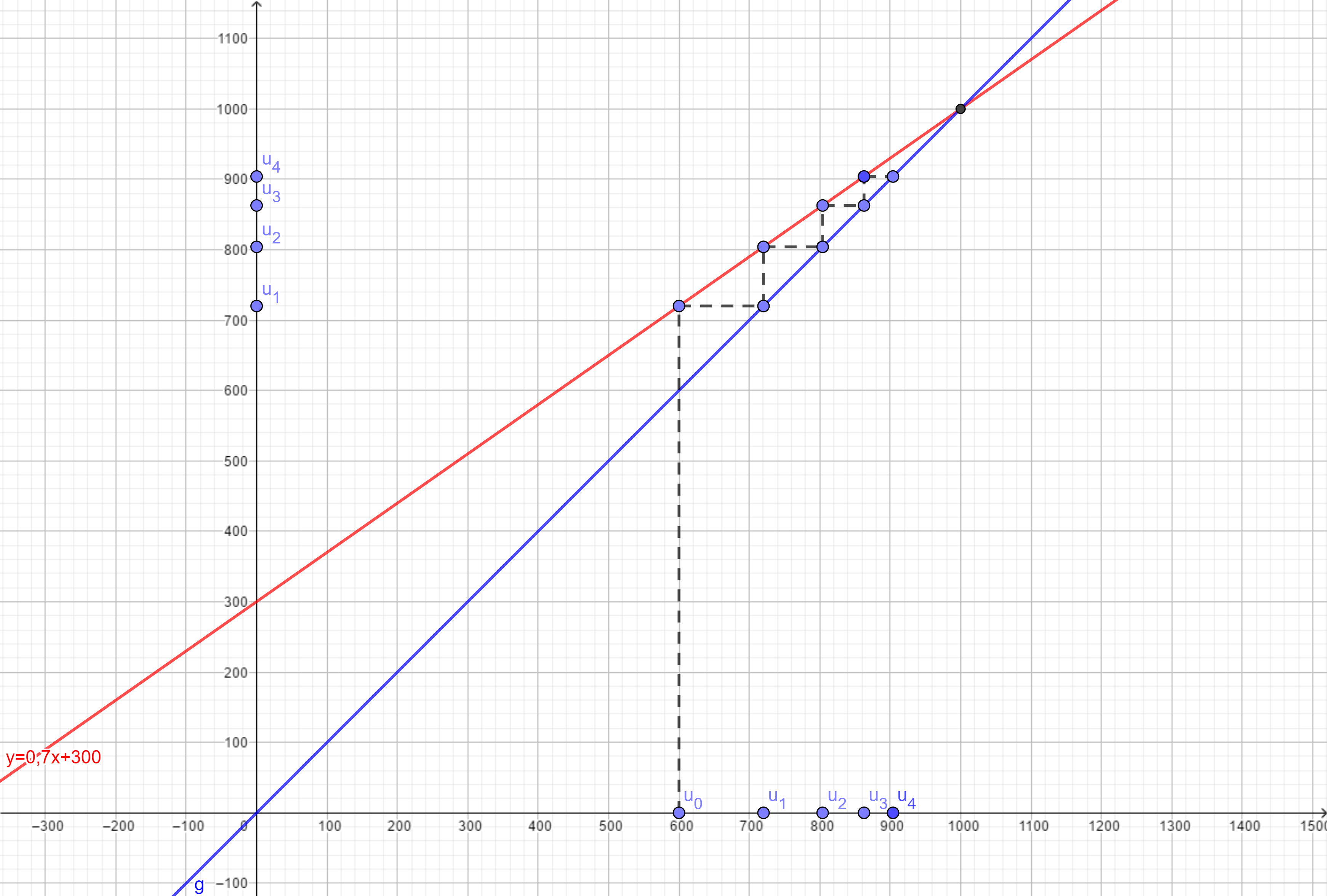
= 

P(*n+1*) est vraie

**Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.

P(n) est donc vraie pour tout entier naturel *n* c’est-à-dire . *(3,5 points)*

Or *un + 2n²+3n+5 = vn* ainsi *un = vn -2n²-3n-5* soit *un* =  *(0,5 point)*



Démontrons à présent cette conjecture.

3.On rappelle que.Le but de l’exercice est de trouver la formule explicite de puis ensuite d’étudier la limite.

a)Soit une suite constante qui vérifie la même relation que la suite

On admet donc que .

On pose Compléter

Quelle équation vérifie  ? Puis déterminer .

est équivalent à

est équivalent à

est équivalent à

b)Soit la suite définie par

On rappelle que et .

Exprimer en fonction de .

c)Quelle est la nature de la suite  ? Donnerpuis exprimer en fonction de .

On en déduit que la suite  est géométrique de raison q=0,7 .

On en déduit que  **= .**

d) En déduire l’expression de en fonction de .

On en déduit que

e) Déterminer en justifiant puis conclure.

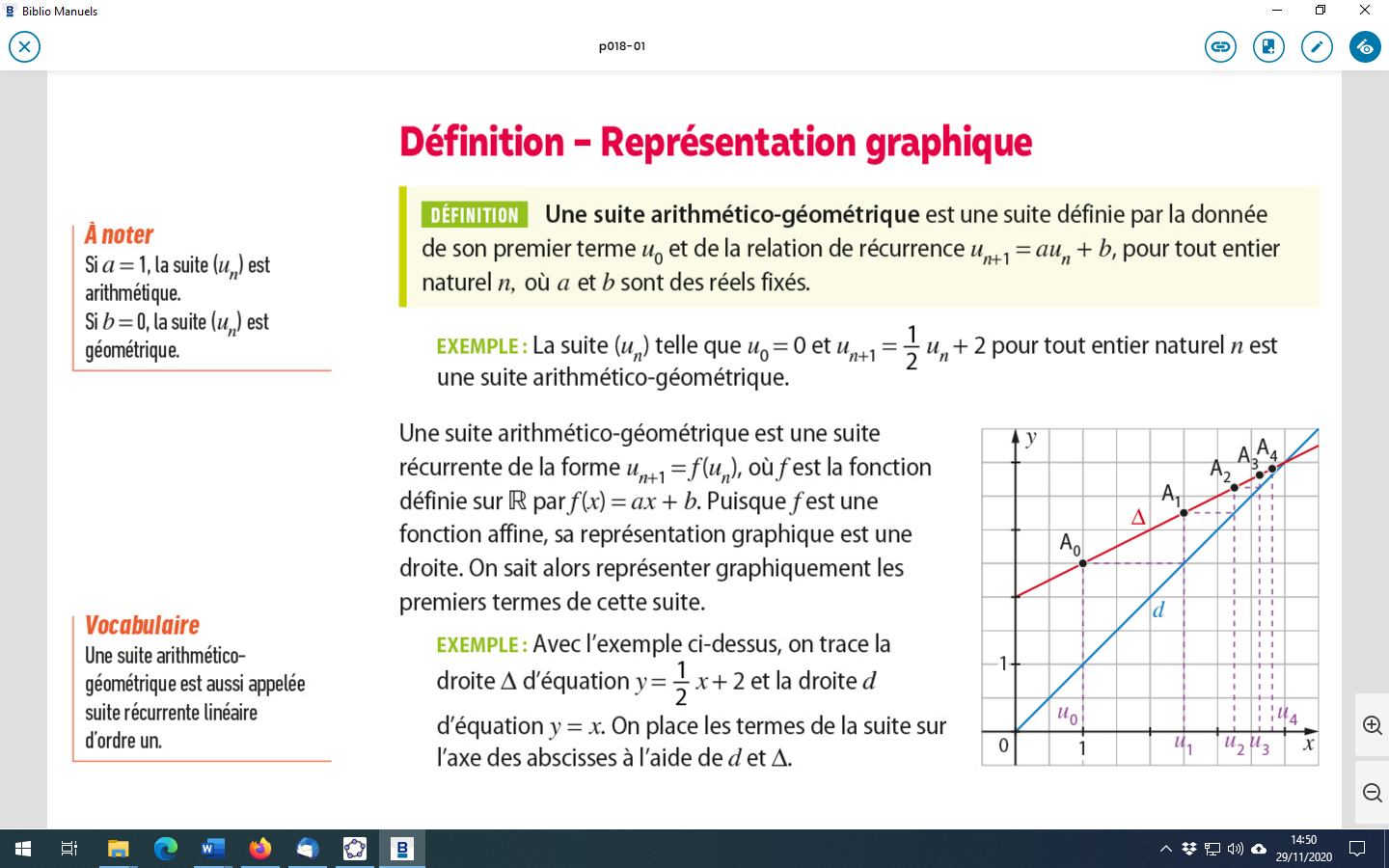
car est de la forme avec et .

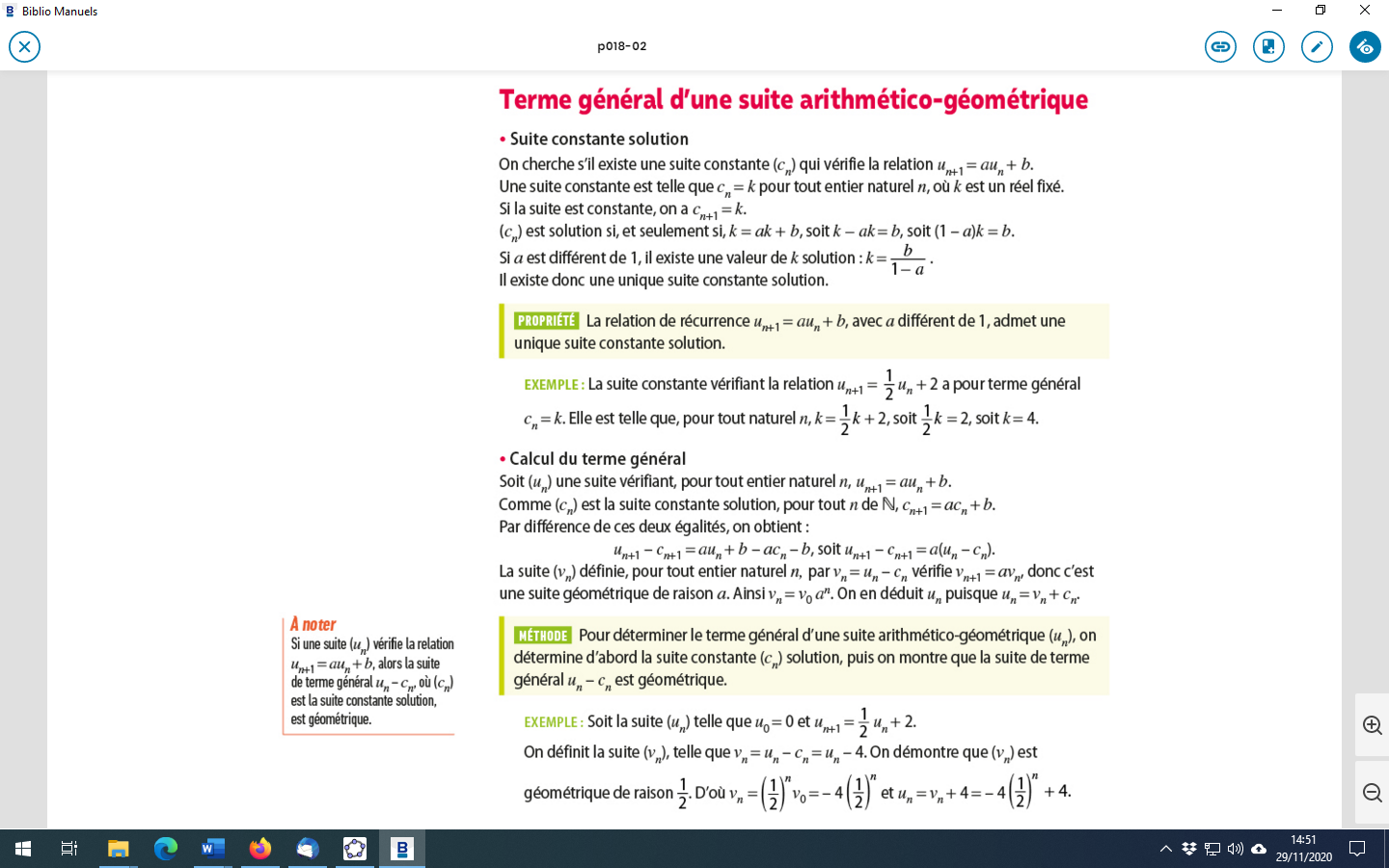
On en déduit donc que

A long terme , la colonie comptera à peu près 1000 manchots.

Diminuer de 30% revient à multiplier par

D’une année sur l’autre , le nombre de manchots est donc multiplié par 0,7. On multiplie donc par 0,7. De plus , d’une année sur l’autre , il y a 300 nouveaux manchots. Au résultat précédent , on ajoute donc 300. On en déduit donc que .





**Point méthode : obtention de la formule explicite d’une suite arithmético-géométrique du type**

1ère étape : **suite constante**

on détermine une suite constante qui vérifie la même relation que la suite .

2ème étape : **différence géométrique**

on construit une suite  différence entre suites et . On montre que est une suite géométrique.

3ème étape : **formules explicites en cascade**

on trouve l’expression de en fonction de puis on en déduit l’expression de en fonction de

**Schématiquement :**

**Exercice d’application :**

Soit la suite définie par et pour tout entier naturel , .

1.Soit une suite constante qui vérifie la même relation que la suite

On admet donc que .On pose Déterminer .

est équivalent à

est équivalent à

est équivalent à

2.Soit la suite définie par On rappelle que et .

Exprimer en fonction de . En déduire que la suite est géométrique.

.

On en déduit que la suite  est géométrique de raison q=3 .

3. Exprimer en fonction de puis En déduire l’expression de en fonction de .

On en déduit que  **= .**

On en déduit que

4. Déterminer en justifiant .

car est de la forme avec et .

On en déduit donc que