Devoir maison numéro 1 pour le 23/09/24

Exercice 1 : suite arithmétique - contextualisation

Pierre se constitue une tirelire afin d'acheter un vélo qui coute 183,75 €.
Après un dépôt initial dans cette tirelire de 8 euros, il décide qu'à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée augmentera de 2 euros par rapport à celle du mois précédent.
On note $p_0 = 8$ le dépôt initial et p_n la somme déposée à la fin du nième mois.
On obtient ainsi une suite (p_n).

1. Donner sans justifier $p_1$et p_2.

2.Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

3.En déduire la nature de la suite (p_n) ainsi que l'expression de p_n en fonction de n.

4.a) Quelle somme contiendra la tirelire au bout de deux mois ?

b) Démontrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de n mois est
$S_n = (n+1)(n+8)$.

5.Au bout de combien de mois, Pierre pourra t'il casser sa tirelire et s'acheter son vélo. Justifier.

Exercice 2 :étude de la monotonie

Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 16 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$est décroissante.

Exercice 3 :étude d'une suite arithmético-géométrique

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.
Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume. On appelle $V_n$le volume en litres stocké le $n^{ième}$ samedi de tonte.
On a $V_1 = 120$.Calculer V_2 et V_3.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer V_{n+1}en fonction deV_n .

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $t_n$par $t_n = 160 - V_n$.Démontrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.

2. Exprimer t_n en fonction de n et en déduire l'expression de V_n en fonction de n.

3. Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ?

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 5 \end{cases}$ (n entier naturel)

1. Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 6{,}25$.

2. Démontrer de deux façons différentes que la suite u est décroissante.

Exercice 5 : il suffira d'un signe …

Le but de l'exercice est de prouver que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 - x$. .
La dérivabilité des fonctions est admise dans cet exercice.
1.Pour tout réel x, donner dans justifier $g'(x)$.
2.Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g'(x) > 0$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction g.
3.Déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ puis prouver que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$
4. Pour les volontaires
Soit f une fonction **quelconque** 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ de courbe représentative Cf .En s'inspirant de la méthode précédente , démontrer que si pour tout réel $x, f''(x) > 0$ alors Cf est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2.
Remarque : 2 est arbitraire . Le résultat est vrai si on remplace 2 par un réel a.

Exercices 6 :

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

<u>Exercice 1 : (5 points)</u>

1.Dans C2, on écrit « =B2+2*A2^2+3*A2+5 » *(0,5 point)*

Dans B3, on écrit « =2*B2+2*A2^2-A2 » *(0,5 point)*

2.Il semble bien que v soit géométrique de raison 2.

<u>1ère stratégie : montrer que *v* est géométrique de raison 2</u>

Pour tout entier n , montrons que $v_{n+1} = 2v_n$.

Pour tout entier n , $v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2+3(n+1)+5$

$= u_{n+1} + 2(n^2+2n+1)+3n+3+5$

$= u_{n+1} + 2n^2+7n+10$ or $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2-n$

$= 2u_n + 2n^2-n + 2n^2+7n+10$

$= 2u_n + 4n^2+6n+10$

$= 2(u_n + 2n^2+3n+5)$

$= 2v_n$. *(2,5 points)*

v est donc géométrique de premier terme $v_0 = 7$ de raison $q=2$.

Ainsi pour tout entier n, $v_n = v_0q^n = 7\times 2^n$ *(0,75 point)*

Or $u_n + 2n^2+3n+5 = v_n$ ainsi $u_n = v_n - 2n^2-3n-5$ soit $u_n = 7\times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ *(0,75 point)*

2ème stratégie : raisonner par récurrence

On se doute que v_n = 7×2^n .

Démontrons le par récurrence.

Soit $P(n)$ la proposition de récurrence « $v_n = 7\times 2^n$ » (n entier naturel).

- 1ère étape : montrons que P(0) est vraie. ***(initialisation)***
  $v_0 = 7$ et $7\times 2^0 = 7$ .Donc $\mathbf{v_0} =$ 7×2^0.

- 2ème étape : montrons que pour tout entier naturel n , si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie. ***(hérédité)***

Hypothèses : $v_n = 7\times 2^n$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2-n$ et $v_n = u_n + 2n^2+3n+5$

But : montrer que $v_{n+1} = 7\times 2^{n+1}$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2+3(n+1)+5$

$= u_{n+1} + 2(n^2+2n+1)+3n+3+5$

$= u_{n+1} + 2n^2+7n+10$

$= 2u_n + 2n^2-n + 2n^2+7n+10$

$= 2(u_n + 2n^2+3n+5)$

$= 2v_n$.

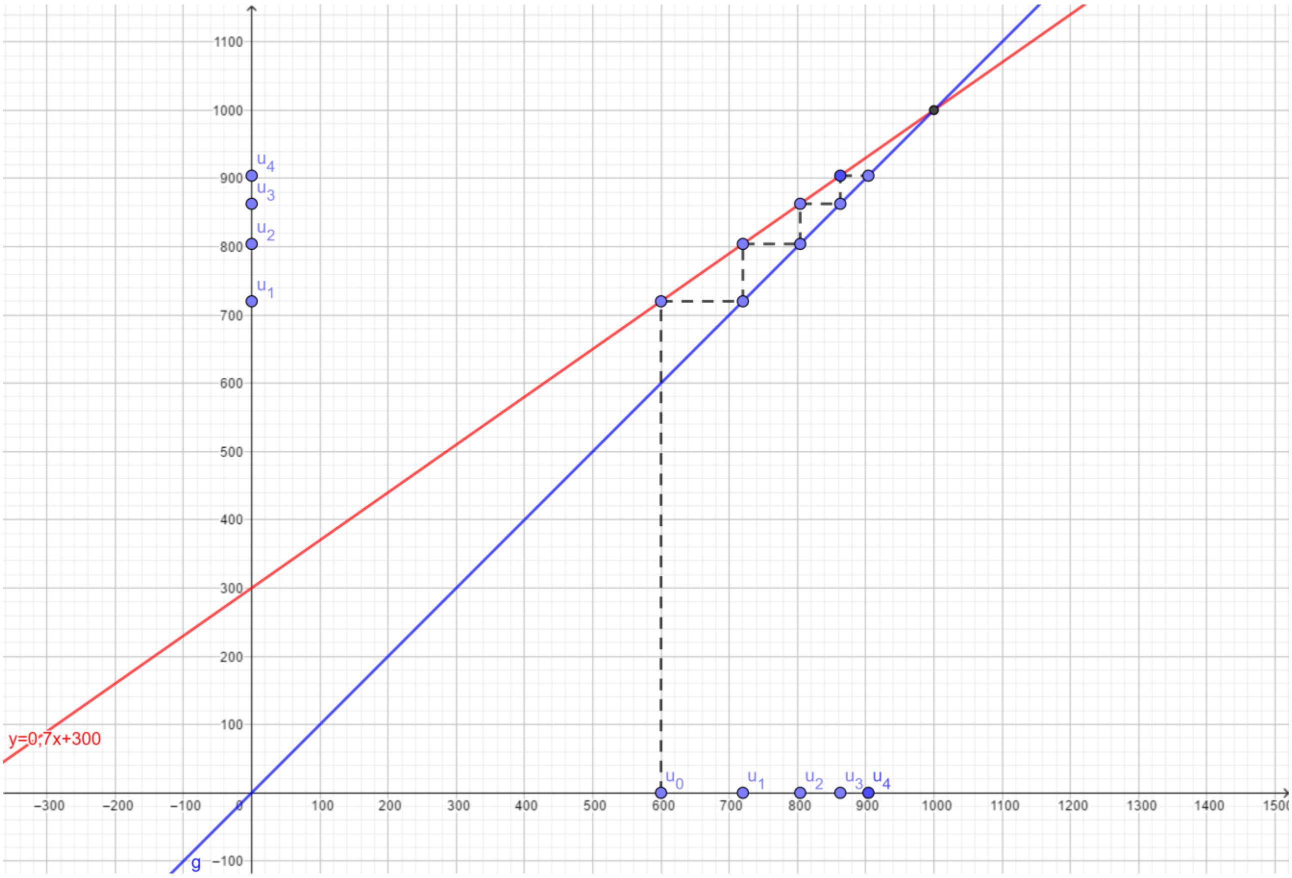
$= 2\times 7\times 2^n$

$= 7\times 2^{n+1}$

P($n+1$) est vraie

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
P(n) est donc vraie pour tout entier naturel n c'est-à-dire $v_n = 7\times 2^n$. *(3,5 points)*

Or $u_n + 2n^2+3n+5 = v_n$ ainsi $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$ soit $u_n = 7\times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ *(0,5 point)*



Démontrons à présent cette conjecture.
3.On rappelle que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.Le but de l'exercice est de trouver la formule explicite de u_n puis ensuite d'étudier la limite.

a)Soit (c_n) une suite constante qui vérifie la même relation que la suite (u_n)
On admet donc que $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 300$.
On pose $c_n = k$. Compléter $c_{n+1} = k$
Quelle équation vérifie k ? Puis déterminer k.
$k = 0{,}7k + 300$ est équivalent à $k - 0{,}7k = 300$

est équivalent à $0{,}3k = 300$

est équivalent à $k = \frac{300}{0{,}3} = 1000$

b)Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - c_n$.
On rappelle que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$ et $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 300$.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$

$= 0{,}7u_n + 300 \quad - (0{,}7c_n + 300)$

$= 0{,}7u_n + 300 \quad - 0{,}7c_n - 300$

$= 0{,}7u_n - 0{,}7c_n$

$= 0{,}7(u_n - c_n)$

$= 0{,}7v_n$

c)Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner v_0 puis exprimer $v_n$en fonction de n.

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison q=0,7 . $v_0 = u_0 - c_0 = 600 - 1000 = -400$

On en déduit que $\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{v_0 q^n} = \boldsymbol{-400 \times 0{,}7^n}$ **.**

d) En déduire l'expression de $u_n$en fonction de n.

$v_n = u_n - c_n$. On en déduit que $u_n \;= v_n + c_n \;= \boldsymbol{-400 \times 0{,}7^n + 1000}$

e) Déterminer en justifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$puis conclure.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$ car $0{,}7^n$ est de la forme q^n avec $q = 0{,}7$ et $0 \leq 0{,}7 < 1$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{-400 \times 0{,}7^n + 1000} = 1000$
A long terme , la colonie comptera à peu près 1000 manchots.

Diminuer de 30% revient à multiplier par $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$
D'une année sur l'autre , le nombre de manchots est donc multiplié par 0,7. On multiplie donc u_n par 0,7.
De plus , d'une année sur l'autre , il y a 300 nouveaux manchots. Au résultat précédent , on ajoute donc 300. On en déduit donc que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.

À noter
Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique.
Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique.

DÉFINITION **Une suite arithmético-géométrique** est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout entier naturel n, où a et b sont des réels fixés.

EXEMPLE : La suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$ pour tout entier naturel n est une suite arithmético-géométrique.

- **Suite constante solution**

On cherche s'il existe une suite constante (c_n) qui vérifie la relation $u_{n+1} = au_n + b$.
Une suite constante est telle que $c_n = k$ pour tout entier naturel n, où k est un réel fixé.
Si la suite est constante, on a $c_{n+1} = k$.
(c_n) est solution si, et seulement si, $k = ak + b$, soit $k - ak = b$, soit $(1 - a)k = b$.
Si a est différent de 1, il existe une valeur de k solution : $k = \frac{b}{1-a}$.
Il existe donc une unique suite constante solution.

PROPRIÉTÉ La relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, avec a différent de 1, admet une unique suite constante solution.

EXEMPLE : La suite constante vérifiant la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$ a pour terme général $c_n = k$. Elle est telle que, pour tout naturel n, $k = \frac{1}{2}k + 2$, soit $\frac{1}{2}k = 2$, soit $k = 4$.

- **Calcul du terme général**

Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$.
Comme (c_n) est la suite constante solution, pour tout n de $\mathbb{N}$, $c_{n+1} = ac_n + b$.
Par différence de ces deux égalités, on obtient :

$$u_{n+1} - c_{n+1} = au_n + b - ac_n - b, \text{ soit } u_{n+1} - c_{n+1} = a(u_n - c_n).$$

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - c_n$ vérifie $v_{n+1} = av_n$, donc c'est une suite géométrique de raison a. Ainsi $v_n = v_0\, a^n$. On en déduit u_n puisque $u_n = v_n + c_n$.

À noter
Si une suite (u_n) vérifie la relation $u_{n+1} = au_n + b$, alors la suite de terme général $u_n - c_n$, où (c_n) est la suite constante solution, est géométrique.

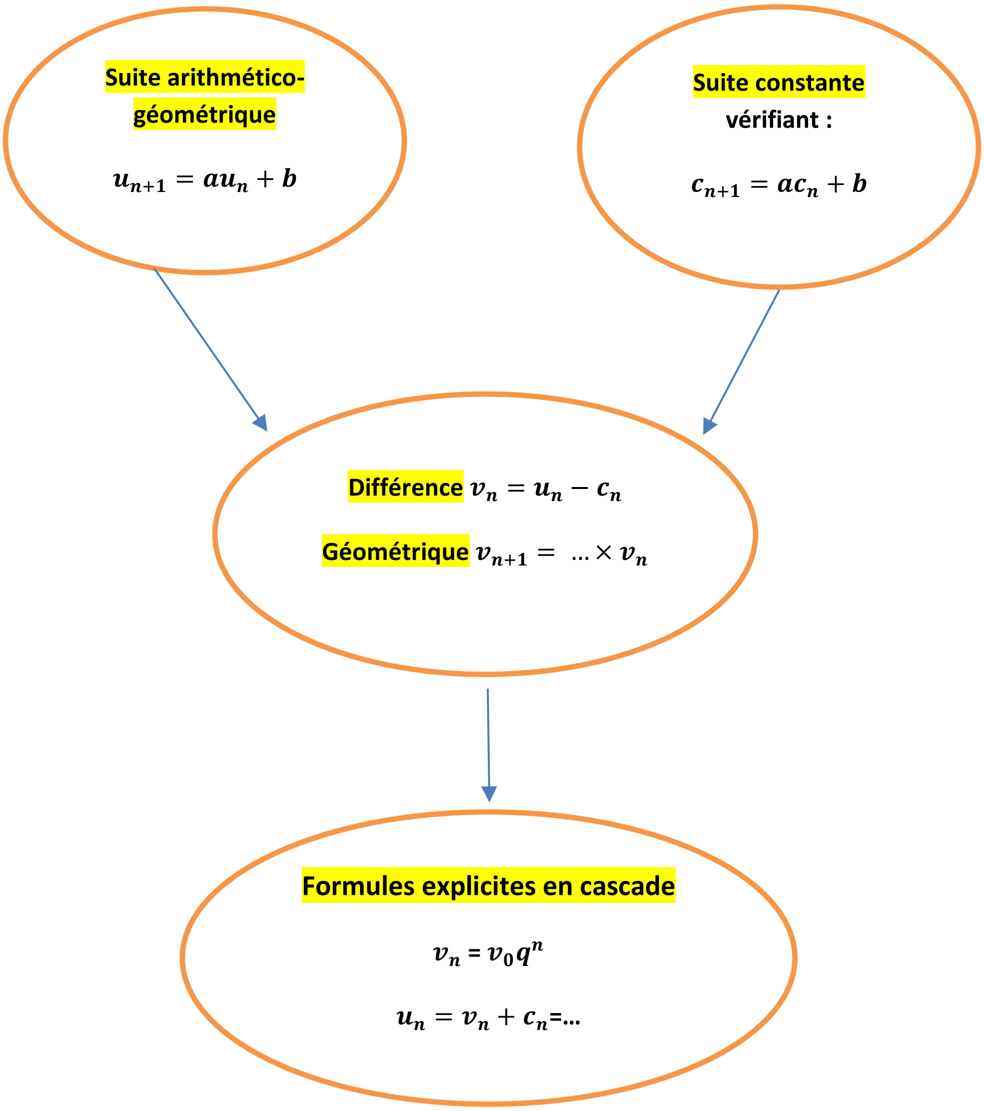
MÉTHODE Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique (u_n), on détermine d'abord la suite constante (c_n) solution, puis on montre que la suite de terme général $u_n - c_n$ est géométrique.

EXEMPLE : Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$.
On définit la suite (v_n), telle que $v_n = u_n - c_n = u_n - 4$. On démontre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'où $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$.

<u>Point méthode : obtention de la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique du type $u_{n+1} = au_n + b$</u>

1ère étape : **suite constante**
on détermine une suite constante (c_n) qui vérifie la même relation que la suite (u_n) .
2ème étape : **différence géométrique**
on construit une suite (v_n) différence entre suites (u_n) et (c_n) . On montre que (v_n) est une suite géométrique.
3ème étape : **formules explicites en cascade**
on trouve l'expression de v_n en fonction de n puis on en déduit l'expression de u_n en fonction de n

<u>Schématiquement :</u>



Exercice d'application :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

1.Soit (c_n) une suite constante qui vérifie la même relation que la suite (u_n)

On admet donc que $c_{n+1} = 3c_n - 5$.On pose $c_n = k$. Déterminer k.

$k = 3k - 5$ est équivalent à $k - 3k = -5$

est équivalent à $-2k = -5$

est équivalent à $k = \frac{5}{2}$

2.Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - c_n$.On rappelle que $u_{n+1} = 3u_n - 5$ et $c_{n+1} = 3c_n - 5$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que la suite (v_n) est géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$

$= 3u_n - 5 \quad - (3c_n - 5)$

$= 3u_n - 5 - 3c_n + 5$

$= 3u_n - 3c_n$

$= 3(u_n - c_n)$

$= 3v_n$.

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison q=3 . $v_0 = u_0 - c_0 = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

3. Exprimer $v_n$en fonction de n puis En déduire l'expression de $u_n$en fonction de n.

On en déduit que $\boldsymbol{v_n}$ **=** $\boldsymbol{v_0 q^n} = -\frac{1}{2} \times \mathbf{3^n}$ **.**

$v_n = u_n - c_n$. On en déduit que $u_n = v_n + c_n = -\frac{1}{2} \times \mathbf{3^n} + \frac{5}{2}$

4. Déterminer en justifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est de la forme q^n avec $q = 3$ et $3 > 1$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2} \times \mathbf{3^n} + \frac{5}{2} = -\infty$