Devoir maison numéro 10 (pour le 09/05/2025)

Exercice 1 :

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u =7
  while ... :
    n = n+1
    u = ...
  return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Exercice 2 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de* x.

   a. Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

   b. La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2\,;0\,;0),\quad \mathrm{B}(0\,;4\,;3),\quad \mathrm{C}(4\,;4\,;1),\quad \mathrm{D}(0\,;0\,;4)\quad \text{et}\quad \mathrm{H}(-1\,;1\,;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

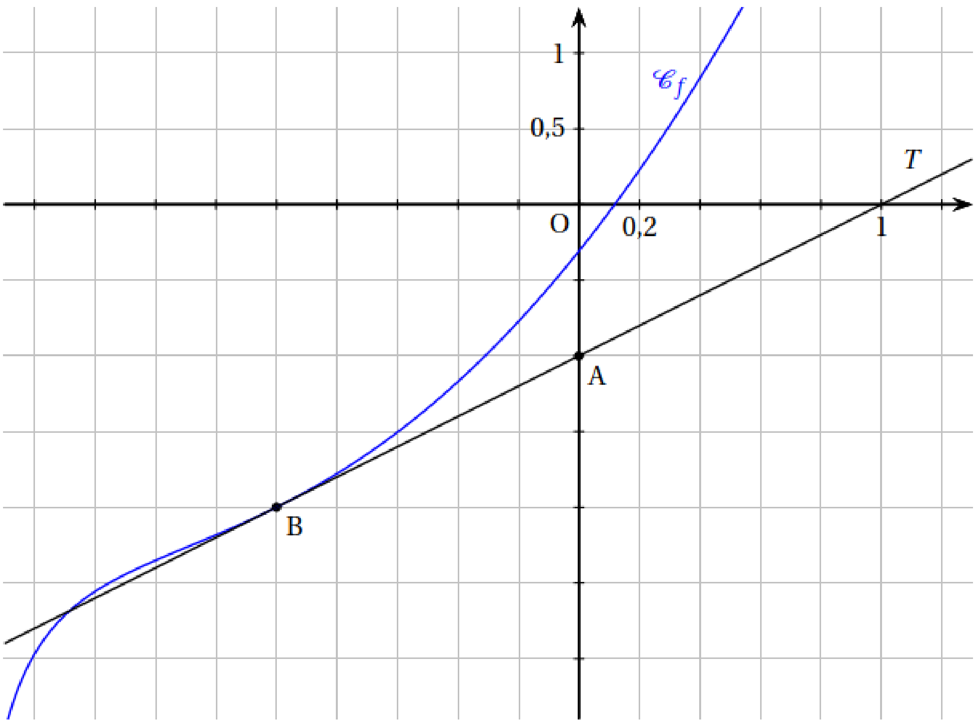
Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Exercice 4 :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;-1)$.



Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

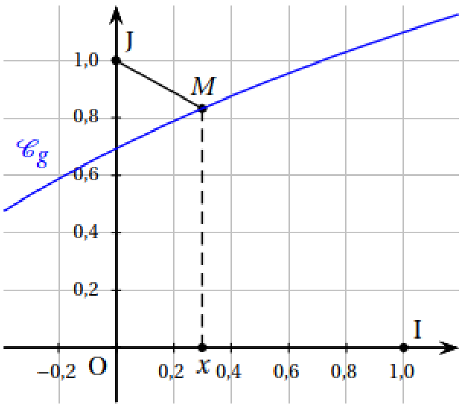
1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, représentée ci- contre.



Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{J}M^2$.

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
   On admet également que pour tout réel $x > -2$,
   $$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
   où f est la fonction étudiée en partie B.
   a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_a le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.
   a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   b. En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_a et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Exercice 5 :

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7% des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

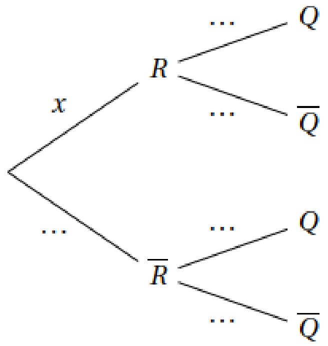
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

   b. Montrer que $x = 0{,}9$.



3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.

Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).

La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.

À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

   a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

   b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

   c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».