Correction du devoir maison numéro 1

Exercice 1 : suite arithmétique - contextualisation

1. $p_1 = 10$ et $p_2 = 12$.

2.Pour tout entier n, $p_{n+1} = p_n + 2$.

3.On en déduit que la suite (p_n) est une suite arithmétique de 1er terme $p_0 = 8$ et de raison $r = 2$.

Pour tout entier n, $p_n = 8 + 2n$

4.a) $p_0 + p_1 + p_2 = 8 + 10 + 12 = 30$.

Au bout de deux mois, la tirelire contiendra 30 €.

b) Pour tout entier n,

$$S_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n = (n+1) \times \frac{p_0 + p_n}{2} = (n+1) \times \frac{8+8+2n}{2} = (n+1)(n+8)$$

5.On résout l'inéquation $S_n \geq 183{,}75$

$$(n+1)(n+8) \geq 183{,}75 \Leftrightarrow n^2 + 8n + n + 8 - 183{,}75 \geq 0 \Leftrightarrow n^2 + 9n - 175{,}75 \geq 0$$

On reconnait une inéquation du second degré. $a = 1, b = 9, c = -175{,}75$

$\Delta = b^2 - 4ac = \dots = 784$

Δ>0 l'équation admet donc 2 solutions distinctes :

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{784}}{2} = -18,5}$ **et** $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{784}}{2} = \mathbf{9,5}$

x	-∞ $\quad$ $\mathbf{-18,5}$ $\quad\quad$ $\mathbf{9,5}$ $\quad$ +∞
$2x^2 - x - 6$	+ $\quad$ *0* $\quad$ - $\quad$ *0* $\quad$ + *Signe dea* $\quad$ *signe de –a* $\quad$ *signe de a*

$n^2 + 9n - 142 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 9{,}5$ .Au bout de 10 mois, Pierre pourra casser sa tirelire et s'acheter son vélo.

Exercice 2 :étude de la monotonie

Démontrons que la suite (u_n) définie par $u_n = 16 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ est décroissante.

Pour tout entier naturel *n* ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 16 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(16 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n\right) \\ &= 16 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 16 + 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &= -5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{4}{3} + 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &= -\frac{20}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n + 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &= \left(-\frac{20}{3} + 5\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &= -\frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Or $-\frac{5}{3} < 0$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$. Ainsi pour tout entier naturel *n* , $-\frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exercice 3 :étude d'une suite arithmético-géométrique

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume. On appelle V_n le volume en litres stocké le $n^{ième}$ samedi de tonte.

On a $V_1 = 120$. V_2 =150 et V_3=157,5

1.Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120$.

2.On définit, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre t_n par $t_n = 160 - V_n$.

pour tout entier $n \geq 1$,

$t_{n+1} = 160 - V_{n+1} = 160 - \frac{1}{4}V_n - 120 = -\frac{1}{4}V_n + 40 = \frac{1}{4}(-V_n + 160) = \frac{1}{4}t_n$.

La suite (t_n) est donc géométrique de 1er terme $t_1 = 160 - V_1 = 160 - 120 = 40$, de raison q=$\frac{1}{4}$.

3.On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $t_n = t_1 \times q^{n-1} = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Ainsi $160 - V_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $160 - 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = V_n$

4.$-40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0$

On en déduit que $160 - 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 160 < 300$ et donc que $V_n < 300$.

Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage ne sera donc jamais rempli.

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 5 \end{cases}$ *(n entier naturel)*

1. Démontrons, par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 6{,}25$.

Soit P(n) la proposition « $u_n \leq 3$ » (n entier naturel)

1ère étape :initialisation

vérifions que $P(0)$ est vraie

$u_0 = 9$ et $9 \geq 6{,}25$ $P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \geq 6{,}25$.

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geq 6{,}25$

$u_k \geq 6{,}25$

$\frac{1}{5}u_k \geq \frac{1}{5} \times 6{,}25$

$\frac{1}{5}u_k + 5 \geq 1{,}25 + 5$

$u_{k+1} \geq 6{,}25$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. Démontrons de deux façons différentes que la suite u est décroissante.

1ère méthode :signe de $u_{n+1} - u_n$

pour tout entier naturel *n* , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 5 - u_n = \frac{-4}{5}u_n + 5$.

Or $u_n \geq 6{,}25$

$\frac{-4}{5}u_n \leq \underbrace{\frac{-4}{5} \times 6{,}25}_{-5}$

$\frac{-4}{5}u_n + 5 \leq 0$. On en déduit donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite *u* est donc décroissante.

2ème méthode : par récurrence

Soit *P(n)* la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » (*n* entier naturel).

- **1ère étape :initialisation**

  vérifions que P(0) est vraie.

  $u_0 = 9$, $u_1 = \frac{1}{5} \times 9 + 5 = 6{,}8$ On a bien $u_1 \leq u_0$.

- **2ème étape : hérédité**

  Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_k$.

  But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+2} \leq u_{k+1}$

$u_{k+1} \leq u_k$
$\frac{1}{5}u_{k+1} \leq \frac{1}{5}u_k$
$\frac{1}{5}u_{k+1} + 5 \leq \frac{1}{5}u_k + 5$
$u_{k+2} \leq u_{k+1}$
P(k+1) est vraie
Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
La suite *u* est donc **décroissante**.

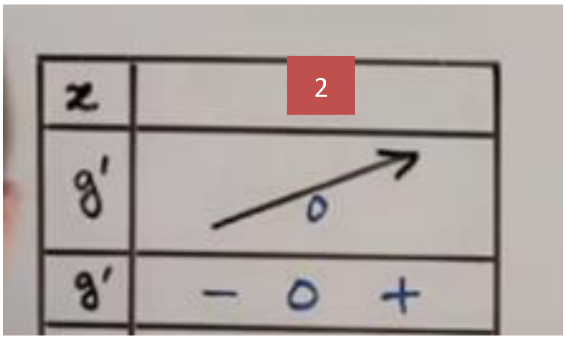
<u>Exercice 5 : il suffira d'un signe …</u>
Le but de l'exercice est de prouver que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.
$g(x) = e^x - 1 - x$.
1.Pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$
2. $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ S=]0 ;+∞[

x	-∞		0		+∞
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	0	↗	

La fonction g est décroissante sur]-∞ ;0] et croissante sur [0 ;+∞[
3. g admet donc un minimum en 0 de valeur $g(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$.
On en déduit le tableau de signes :

x	-∞		0		+∞
$g(x)$		+	0	+	

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) \geq 0$ et par conséquent $e^x - 1 - x \geq 0$ et donc $e^x \geq 1 + x$
*4. Soit f une fonction **<u>quelconque</u>** 2 fois dérivables sur ℝ de courbe représentative Cf .Démontrons que si pour tout réel x, $f''(x) > 0$ alors Cf est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2.*



Une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x) = f(x) - f'(2)(x-2) - f(2)$.
Alors : pour tout réel x, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
$g''(x) = f''(x)$ Or $f''(x) > 0$
Ainsi $g''(x) > 0$. *Ainsi* g' est strictement croissante sur ℝ.
De plus, $g'(2) = f'(2) - f'(2) = 0$.

Donc g' est négative pour $x \leq 2$ et positive pour $x \geq 2$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

En effet : $g(2) = f(2) - f'(2)(2-2) - f(2) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur ℝ.
Soit $f(x) \geq f'(2)(x-2) + f(2)$
Cf est donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2.

Exercice 6 :

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1.Dans C2, on écrit « =B2+2*A2^2+3*A2+5 »
Dans B3, on écrit « =2*B2+2*A2^2-A2 »
2.Il semble bien que (v_n) soit géométrique de raison 2.

1ère stratégie : montrer que *v* est géométrique de raison 2 cad montrons que $v_{n+1} = 2\,v_n$.
Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 \\ &= u_{n+1} + 2(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 + 5 \\ &= u_{n+1} + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 8 \\ &= u_{n+1} + 2n^2 + 7n + 10 \qquad \textit{or} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \\ &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10 \\ &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 7$ de raison $q = 2$.
Ainsi pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 7 \times 2^n$.
Or $u_n + 2n^2 + 3n + 5 = v_n$ ainsi $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$ $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

2ème stratégie : raisonnement par récurrence
On se doute que $v_n = 7 \times 2^n$.Démontrons le par récurrence.
Soit *P(n)* la proposition de récurrence « $v_n = 7 \times 2^n$ » (n entier naturel).

1ère étape :initialisation
vérifions que $P(0)$ est vraie

$$v_0 = 7 \qquad \text{et} \qquad 7 \times 2^0 = 7$$

$P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité
Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $v_k = 7 \times 2^k$.
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $v_{k+1} = 7 \times 2^{k+1}$.

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} + 2(k+1)^2 + 3(k+1) + 5 \\ &= u_{k+1} + 2(k^2 + 2k + 1) + 3k + 3 + 5 \\ &= u_{k+1} + 2k^2 + 4k + 2 + 3k + 8 \\ &= u_{k+1} + 2k^2 + 7k + 10 \qquad \textit{or} \quad u_{k+1} = 2u_k + 2k^2 - k \\ &= 2u_k + 2k^2 - k + 2k^2 + 7k + 10 \\ &= 2u_k + 4k^2 + 6k + 10 \\ &= 2(u_k + 2k^2 + 3k + 5) \qquad \textit{or} \quad v_k = u_k + 2k^2 + 3k + 5 \\ &= 2v_k \\ &= 2 \times 7 \times 2^k \\ &= 7 \times 2^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
Or $u_n + 2n^2 + 3n + 5 = v_n$ ainsi $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$ $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.