***Devoir à la maison numéro 2 (pour le 10/10/24)***

**Exercice 1 : équation différentielle**

**Les 2 questions sont indépendantes.**

1.Résoudre l’équation différentielle $3y’-y=4 et y(1)=0.$

2.Résoudre l’équation différentielle $y’-3y=2x-1.$

**Exercice 2 : convexité**

****

****

****

**Exercice 3 : récurrence et fonction**

On définit la suite $\left(u\_{n}\right)$ par : pour tout entier naturel $n$, $u\_{n+1}=\frac{2u\_{n}}{u\_{n}+1} $et $u\_{0}=3$.

**1.** Soit *f* la fonction définie sur $[1;+\infty [$ par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

**a.** On admet que *f* est dérivable sur $[1;+\infty [$. Montrer que, pour tout réel $x$ de $[1;+\infty [$,

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)²}$$

b) En déduire le tableau de variations de *f* sur $[1;+\infty [$. (la limite en +∞ n’est pas demandée)

c) Déduire de la question précédente que, si $x>1$ alors $f\left(x\right)>1$.

2. Démontrer à l’aide d’un raisonnement par récurrence et à l’aide de la question précédente que pour tout entier naturel $n$ $,u\_{n}>1$

3. Démontrer que la suite$\left(u\_{n}\right)$ est décroissante.

4. Comme$ u\_{n}\ne 1$ alors on peut définir la suite $\left(v\_{n}\right)$ par : pour tout entier naturel $n$, $v\_{n}=\frac{u\_{n}}{u\_{n}-1}$.

a) Démontrer que cette suite est une suite géométrique de raison 2.

b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer$ v\_{n}$ puis $u\_{n}$ en fonction de $n$.

**Exercice 4 : programmation**

On définit la suite $\left(u\_{n}\right)$ par : pour tout entier naturel $n$, $u\_{n+1}=u\_{n}+2n+2 $et $u\_{0}=0$.

On considère les fonctions python suivantes :

|  |  |
| --- | --- |
| **Programme 1** | **Algorithme 2** |
| *def termesuite(n) :*$ u=0$ *for i in range(1,n+1) :*$u=u+2i+2$ *return(u)*  | *def termesuite(n) :*$ u=0$ *for i in range(0,n) :*$u=u+2i+2$ *return(u)*  |

1. De ces 2 programmes, lequel permet d’afficher en sortie la valeur de *un* ,la valeur de l’entier naturel *n* étant entrée par l’utilisateur. Justifier.

2. Ecrire un programme python permettant de mettre dans une liste les $n $premiers termes de la suite $\left(u\_{n}\right)$. Ecrire ce programme sur Python et faire apparaitre les 20 premiers termes de la suite (joindre une capture d’écran de l’éditeur et de la console)

**Exercice 5: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa**

Pour tout entier *n* , on pose $S\_{n}=\sum\_{k=0}^{n}k^{2}=0^{2}+1^{2}+2^{2}+…+n^{2} .$

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n* , $S\_{n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Nous allons démontrer cette formule à l’aide d’une autre méthode.

a)Pour tout entier naturel *k* vérifiant $ 0\leq k\leq n$ , exprimer $\left(k+1\right)^{3}-k^{3}$ en fonction des puissances de *k*.

b) En déduire que $S\_{n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Déterminer une expression de $S\_{n}=\sum\_{k=0}^{n}k^{3}$.

**Exercice 6: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa**

**Les deux questions sont indépendantes**

1.Résoudre l’équation différentielle $y’’-3y’=5$ avec $y(0)=\frac{2}{3} et y’(0)=\frac{1}{3}$

2.Résoudre l’équation différentielle $z’=3z-4z²$ (indication : diviser par z² on admet que z ne s’annule pas)