Devoir à la maison numéro 2 (pour le 10/10/24)

Exercice 1 : équation différentielle

Les 2 questions sont indépendantes.

1.Résoudre l'équation différentielle $3y' - y = 4$ *et* $y(1) = 0$.

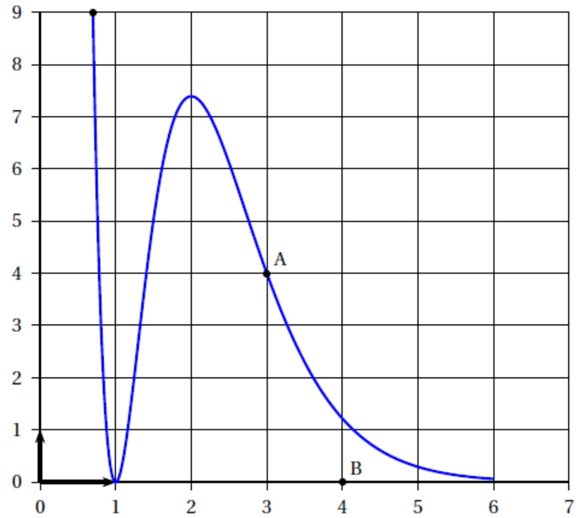
2.Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 2x - 1$.

Exercice 2 : convexité

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0,7 ; 6] ; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points A(3 ; 4) et B(4 ; 0). Déterminer $f'(3)$.

2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle [0,7 ; 6] .

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)e^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7;6] et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7 ; 6].

On ne demande pas de calculer les ordonnées.

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * e\hat{}(-2x + 6)$ $\to f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)e^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\to g(x) = -16xe^{-2x+6} + 4x^2e^{-2x+6} + 14e^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\to 2e^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\to \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} \ ; \ x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$

a. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

Exercice 3 : récurrence et fonction

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ et $u_0 = 3$.

1. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

a. On admet que f est dérivable sur $[1;+\infty[$. Montrer que, pour tout réel x de $[1;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

b) En déduire le tableau de variations de f sur $[1;+\infty[$. (la limite en $+\infty$ n'est pas demandée)

c) Déduire de la question précédente que, si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.

2. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence et à l'aide de la question précédente que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Comme $u_n \neq 1$ alors on peut définir la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_n}{u_n-1}$.

a) Démontrer que cette suite est une suite géométrique de raison 2.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4 : programmation

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ et $u_0 = 0$.

On considère les fonctions python suivantes :

Programme 1	**Algorithme 2**
def termesuite(n) : $u = 0$ *for i in range(1,n+1) :* $u = u + 2i + 2$ *return(u)*	*def termesuite(n) :* $u = 0$ *for i in range(0,n) :* $u = u + 2i + 2$ *return(u)*

1. De ces 2 programmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n ,la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur. Justifier.

2. Ecrire un programme python permettant de mettre dans une liste les n premiers termes de la suite (u_n). Ecrire ce programme sur Python et faire apparaitre les 20 premiers termes de la suite (joindre une capture d'écran de l'éditeur et de la console)

Exercice 5: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa

Pour tout entier n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Nous allons démontrer cette formule à l'aide d'une autre méthode.

a)Pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$, exprimer $(k+1)^3 - k^3$ en fonction des puissances de k.

b) En déduire que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Déterminer une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 6: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa

Les deux questions sont indépendantes

1.Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' = 5$ avec $y(0) = \frac{2}{3}$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$

2.Résoudre l'équation différentielle $z' = 3z - 4z^2$ (indication : diviser par z^2 on admet que z ne s'annule pas)