<u>**Correction du dm2**</u>

Exercice 1 : équation différentielle

Les 2 questions sont indépendantes.

1.Résoudre l'équation différentielle $3y' - y = 4$ *et* $y(1) = 0$.

$3y' - y = 4 \Leftrightarrow 3y' = y + 4 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$ $\left(on\ reconnait\ y' = ay + b\ avec\ a = \frac{1}{3} et\ b = \frac{4}{3}\right)$

● Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$ car $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = -4.$

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{3}x} - 4$, $C \in \mathbb{R}$

On pose $f(x) = Ce^{\frac{1}{3}x} - 4.$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow C\, e^{\frac{1}{3}} - 4 = 0 \Leftrightarrow C\, e^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow C = \frac{4}{e^{\frac{1}{3}}} = 4e^{-\frac{1}{3}}$

$f(x) = 4e^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}x} - 4 = 4e^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x} - 4.$

2.Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 2x - 1$.

$y' - 3y = 2x - 1 \Leftrightarrow y' = 3y + 2x - 1$ $(on\ reconnait\ y' = ay + f\ avec\ a = 3\ et\ f(x) = 2x - 1)$

● Cherchons une solution particulière sous la forme $p(x) = ax + b$. $p'(x) = a$

p est solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 2x - 1$ équivaut à $p'(x) = 3p(x) + 2x - 1$

équivaut à $a = 3(ax + b) + 2x - 1$

équivaut à $a = 3ax + 3b + 2x - 1$

équivaut à $a = (3a + 2)x + 3b - 1$

équivaut à $(3a + 2)x + 3b - 1 = 0x + a$

équivaut à $\begin{cases} 3a + 2 = 0 \\ 3b - 1 = a \end{cases}$

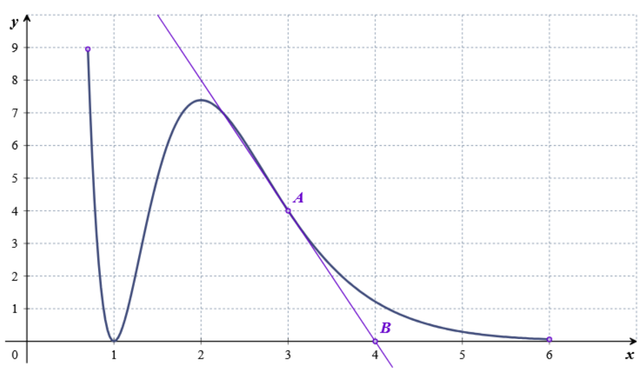
équivaut à $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ 3b = 1 + a = \frac{1}{3} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases}$ $p(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y + 2x - 1$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$, $C \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : convexité



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3; 4)$ et $B(4; 0)$. Déterminer $f'(3)$.

Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB) tangente à la courbe représentative de de la fonction f au point A d'abscisse 3 :

$$f'(3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{soit} \quad f'(3) = \frac{0-4}{4-3} = -4$$

$\boxed{f'(3) = -4.}$

2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0{,}7; 6]$.

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) e^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right) e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

f est **dérivable** sur $[0{,}7; 6]$en tant que produit de fonctions dérivables sur [0,7 ;6].
Pour tout réel x *de* $[0{,}7; 6]$,

- $f = uv$
- $u(x) = x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $u'(x) = 2x - 2$
  $v(x) = e^{-2x+6}$ $\qquad$ $v'(x) = -2e^{-2x+6}$

- $f' = u'v + uv'$
  $$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1)(-2)e^{-2x+6} \\ &= (2x-2)e^{-2x+6} + (-2x^2 + 4x - 2)e^{-2x+6} \\ &= e^{-2x+6}(2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2) \\ &= e^{-2x+6}(-2x^2 + 6x - 4) \end{aligned}$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7; 6]$.
On ne demande pas de calculer les ordonnées.

$e^{-2x+6} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe du polynôme du second degré $-2x^2 + 6x - 4$.
$a = -2, b = 6, c = -4$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4$
$\Delta > 0$. *Ainsi* $-2x^2 + 6x - 4$ admet donc 2 racines distinctes :
$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2}$ **et** $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \mathbf{1}$

x	-∞		2		1		+∞
$-2x^2 + 6x - 4$		- *Signe de a*	*0*	+ *signe de –a*	*0*	- *signe de a*	

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

f est strictement décroissante sur [0,7 ;1] et [2 ;6] et est strictement croissante sur [1 ;2].

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2+6x-4)*e\hat{}(-2x+6)$ $\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2+6x-4\right)e^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16xe^{-2x+6} + 4x^2e^{-2x+6} + 14e^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2e^{-2x+6}\left(2x^2-8x+7\right)$
L4	Résoudre$[g(x)=0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$

a. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

La convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde définie pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}7; 6]$ par $f''(x) = 2\,e^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$. (Ligne 3 du tableau)

Comme pour tout réel x, $e^{-2x+6} > 0$ alors $f''(x)$ est du même signe que le trinôme $2x^2 - 8x + 7$.

Les racines du trinôme étant données dans la ligne 4 du tableau, nous pouvons en déduire le signe de $f''(x)$:

x	0,7		$\frac{-\sqrt{2}+4}{2}$		$\frac{\sqrt{2}+4}{2}$		6
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est concave sur l'intervalle $\left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x_1 = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$.

La courbe représentative de la fonction f admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives $x_1 = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$.

Exercice 3 :

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ et $u_0 = 3$.

***1.** Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.*

***a.** On admet que f est dérivable sur $[1; +\infty[$. Montrer que, pour tout réel x de $[1; +\infty[$,*

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

pour tout réel x de $[1; +\infty[$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$
 $v(x) = x+1$ $\quad v'(x) = 1$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x)1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2}{(x+1)^2}$$

b) En déduire le tableau de variations de f sur $[1; +\infty[$. (la limite en $+\infty$ n'est pas demandée)

pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $\quad 2 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$
On en déduit que $f'(x) > 0$.
f est donc strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$. De plus , $f(1) = \frac{2}{2} = 1$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	1 $\nearrow$

c) Déduire de la question précédente que, si $x > 1$ *alors* $f(x) > 1$.

D'après le tableau de variations , *f* est strictement croissante sur [1 ; +∞[.
Ainsi si $x > 1$ alors $f(x) > f(1)$ c'est-à-dire $f(x) > 1$.

2. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence et à l'aide de la question précédente que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$

Soit *P(n)* la proposition : « $u_n > 1$ » (*n entier naturel)*

<u>1ère étape :</u> (initialisation)
$u_0 = 3$ et $3 \geq 2$.
On en déduit que $u_0 > 1$ on en déduit que P(0) est vraie

<u>2ème étape :</u> (hérédité)
Hypothèse :supposons que pour un entier *k* quelconque, *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k > 1$
But : démontrons que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$

$u_k > 1$
On remplace x par u_k dans la question 1c) et on trouve :
$f(u_k) > 1$
$u_{n+1} > 1$ *P(k+1)* est donc vraie.

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
En vertu du principe de récurrence, *P(n)* est donc vraie pour tout entier naturel *n* c'est-à-dire $u_n > 1$.

3. Démontrer que la suite(u_n) *est décroissante.*

<u>1ère méthode : démonstration par récurrence.</u>

Soit *P(n)* la proposition : « $u_n \geq u_{n+1}$ » (*n entier naturel)*

<u>1ère étape</u> <u>:</u> (initialisation)
$u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{3}{2}$.
On en déduit que $u_0 \geq u_1$ on en déduit que P(0) est vraie

<u>2ème étape</u> <u>:</u> **(hérédité)**
Hypothèse :supposons que pour un entier *k* quelconque, *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \geq u_{k+1}$
But : démontrons que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geq u_{k+2}$

$u_k \geq u_{k+1}$ Or *f* est strictement croissante sur [1 ; +∞[.
$f(u_k) \geq f(u_{k+1})$
$u_{k+1} \geq u_{k+2}$
<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
En vertu du principe de récurrence, *P(n)* est donc vraie pour tout entier naturel *n* c'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1}$
La suite *u* est donc décroissante.

$2^{\text{ème}}$ méthode : signe de $u_{n+1}-u_n$

Pour tout entier n,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-\frac{u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{2u_n-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{u_n-u_n^2}{u_n+1}=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$$

Or $u_n>1. On$ en déduit que $u_n>0$ et $u_n+1>2>0$
-$u_n<-1$ et $1-u_n<0$
On en déduit donc que $\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}<0$. Ainsi $u_{n+1}-u_n<0$. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

4. Comme $u_n\neq 1$ alors on peut définir la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n=\frac{u_n}{u_n-1}$.
a) Démontrer que cette suite est une suite géométrique de raison 2.
b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4.a)pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}$

$$=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}}{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}$$
$$=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}}{\frac{2u_n-u_n-1}{u_n+1}}$$
$$=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}}{\frac{u_n-1}{u_n+1}}$$
$$=\frac{2u_n}{u_n+1}\frac{u_n+1}{u_n-1}$$
$$=\frac{2u_n}{u_n-1}$$
$$=2v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison *q=2* de 1[er] terme $v_0=\frac{3}{2}$.
b)Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0q^n=\frac{3}{2}2^n=3\times 2^{n-1}$
$3\times 2^{n-1}=\frac{u_n}{u_n-1}$ *soit* $u_n=3\times 2^{n-1}(u_n-1)$
$u_n-3\times 2^{n-1}u_n=-3\times 2^{n-1}$
$u_n(1-3\times 2^{n-1})=-3\times 2^{n-1}$
$u_n=\frac{-3\times 2^{n-1}}{1-3\times 2^{n-1}}$.

Exercice 4 : programmation

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+2n+2$ et $u_0=0$.
On considère les fonctions python suivantes :

Programme 1	**Algorithme 2**
def termesuite(n) : $u=0$ *for i in range(1,n+1) :* $u=u+2i+2$ *return(u)*	*def termesuite(n) :* $u=0$ *for i in range(0,n) :* $u=u+2i+2$ *return(u)*

1. De ces 2 programmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n ,la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur. Justifier.

$u_1=u_0+2\times 0+2=2$

On fait tourner ces deux algorithmes en prenant n=1

Programme 1 — Programme 2

n	u	i		n	u	i
1	0			1	0	
1	4	1		1	2	0

Si on rentre n=12 , on doit retrouver en sortie la valeur de u_1 soit 2.
Le bon algorithme est donc le numéro 2.

2. Ecrire un programme python permettant de mettre dans une liste les n premiers termes de la suite (u_n). Ecrire ce programme sur Python et faire apparaitre les 20 premiers termes de la suite (joindre une capture d'écran de l'éditeur et de la console)

```python
def listetermesuite(n) :
    u=0
    L=[u]
    for i in range(0,n) :
        u=u+2*i+2
        L=L+[u]
    return(L)
```

```
Console Python
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, 15:08:03) [MSC v.1916 64 bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> listetermesuite(20)
[0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342, 380, 420]
>>>
```

Exercice 5: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa

Pour tout entier n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

1. Soit *P(n)* la proposition : « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » *(n entier naturel)*

<u>1ère étape :</u> (initialisation)

$S_0 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0$.

On en déduit que $S_0 = \frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6}$ on en déduit que P(0) est vraie

<u>2ème étape :</u> (hérédité)

Hypothèse :supposons que pour un entier *k* quelconque, *P(k)* est vraie c'est-à-dire $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

But : démontrons que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.
En vertu du principe de récurrence, *P(n)* est donc vraie pour tout entier naturel *n*
$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.Nous allons démontrer cette formule à l'aide d'une autre méthode.

a)Pour tout entier naturel k vérifiant $0 \le k \le n$ *, exprimer* $(k+1)^3 - k^3$ *en fonction des puissances de k.*

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - k^3 &= (k+1)(k+1)^2 - k^3\\ &= (k+1)(k^2+2k+1) - k^3\\ &= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 - k^3\\ &= 3k^2 + 3k + 1\end{aligned}$$

b) $(0+1)^3 - 0^3 = 3\times 0^2 + 3\times 0 + 1$
$(1+1)^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$
....
$(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1$

$1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + \ ... + (n+1)^3 - n^3 = 3\times(0^2+1^2+\ ...+n^2) + 3\times(0+1+\ ...+n) + n + 1$
$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1$
$3S_n = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1$
$3S_n = (n+1)((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1)$
$S_n = \frac{(n+1)(2(n+1)^2-3n-2)}{6}$
$S_n = \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}$
$S_n = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 6: uniquement pour ceux qui veulent tenter une prépa
Les deux questions sont indépendantes
1.Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' = 5$ avec $y(0) = \frac{2}{3}$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$
On pose $z = y'$ .z est solution de $z' - 3z = 5$ *soit* $z' = 3z + 5$ et $z(0) = \frac{1}{3}$
Les solutions de l'équation différentielle $z' = 3z + \frac{4}{3}$ sont les fonctions de la forme:$x \longmapsto Ce^{3x} - \frac{5}{3}$,$C \in \mathbb{R}$
$z(0) = \frac{1}{3}$ d'où $C - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ *soit* $C = 2$
$z(x) = 2e^{3x} - \frac{5}{3}$ et donc $y(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - \frac{5}{3}x + k$
Or $y(0) = \frac{2}{3}$ on trouve k=0. $y(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - \frac{5}{3}x$
2.Résoudre l'équation différentielle $z' = 3z - 4z^2$ (indication : diviser par z^2 on admet que z ne s'annule pas)
$\frac{z'}{z^2} = \frac{3z}{z^2} - \frac{4z^2}{z^2}$ soit $\frac{z'}{z^2} = \frac{3}{z} - 4$
On pose $y = \frac{1}{z}$. On obtient $y' = -3y + 4$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{-3x} + \frac{4}{3}$, $C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{z} = Ce^{-3x} + \frac{4}{3}$ soit $z = \frac{1}{Ce^{-3x}+\frac{4}{3}}$