

Devoir à la maison numéro 3 (pour le 07/11/24)

Exercice 1 : équation différentielle $y' = ay + f$

Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 4y = 4x^2 + 2x + 1$ et $y(0) = 3$
(on pourra chercher une solution particulière p sous la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$)

Exercice 2 : une piste pour le GO ?

Le modèle de Verhulst décrit l'évolution d'une population (animale ou humaine).

On note $p(t)$ la population, en milliers d'individus, au temps t , en année.

Comme les ressources (place, nourriture, etc) sont limitées, on suppose que cette population admet une valeur maximum m et que l'accroissement de la population pendant un petit intervalle de temps est proportionnel à la fois à :

- l'intervalle de temps,
- à la population $p(t)$ (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances),
- à l'écart entre population théorique maximum et population actuelle $m - p(t)$ (quand on approche du maximum de la population, la nourriture disponible devient rare et la mortalité augmente)

On suppose donc que la fonction p est solution de l'équation différentielle dite logistique :

$$(E_1) : y' = ay(m - y)$$

On suppose que pour tout réel t , $p(t)$ et $m - p(t)$ sont des réels strictement positifs.

1. Démontrer que si la fonction p est solution de l'équation différentielle (E_1) alors que la fonction $g = \frac{1}{p}$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2) : y' = -amy + a$.

(la réciproque est admise)

2. Résoudre l'équation différentielle (E_2) et en déduire que l'expression p est de la forme :

$$p(t) = \frac{m}{1 + Cme^{-amt}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3. La population des Etats-Unis de 1790 à 1910 a été étudiée par Pearl et Reed en 1920.

Avec l'origine des temps en 1790, les valeurs des paramètres sont alors donnés par $m = 197\,273$ (en milliers d'individus), $Cm = 49,2$ et $am = 0,031169134$

On admet que p est croissante sur $[0; +\infty[$.

- a) Etudier la limite de la fonction p en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
- b) Représenter la courbe de p à l'écran de votre calculatrice et représenter l'allure de la courbe sur votre copie.
- c) Le but de la question est de déterminer en quelle année, selon ce modèle, la population maximale sera atteinte à un million près c'est-à-dire la 1^{ère} année à partir de laquelle :

$$p(t) \geq 196\,273.$$

Compléter le programme Python ci-dessous puis répondre à la question.

```
from math import *
def p(t):
    y=197273/(1+49.2*exp(-0.031169134*t))
    return(y)

t=0
while .....:
    t=.....
print(t)
```

Exercice 3 : « l'envie d'avoir envie... »

On appelle fonction de satisfaction toute fonction f définie sur un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans l'intervalle $[0;100]$.

Lorsque la fonction de satisfaction prend 100 comme valeur maximale, on dit qu'il a « saturation ». On définit aussi la fonction « envie » comme étant la dérivée de la fonction de satisfaction.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction de satisfaction f différent. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une agence de trekking organise des treks au Népal. Son directeur souhaite étudier la satisfaction des clients en fonction de la durée de leur séjour. La fonction de satisfaction f modélisant cette situation est définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $f(x) = 12,5xe^{-0,125x+1}$. (x est exprimé en jours)

1. La fonction f est supposée dérivable sur l'intervalle $[0; 30]$.

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 30]$, $f'(x) = (12,5 - 1,5625x)e^{-0,125x+1}$.

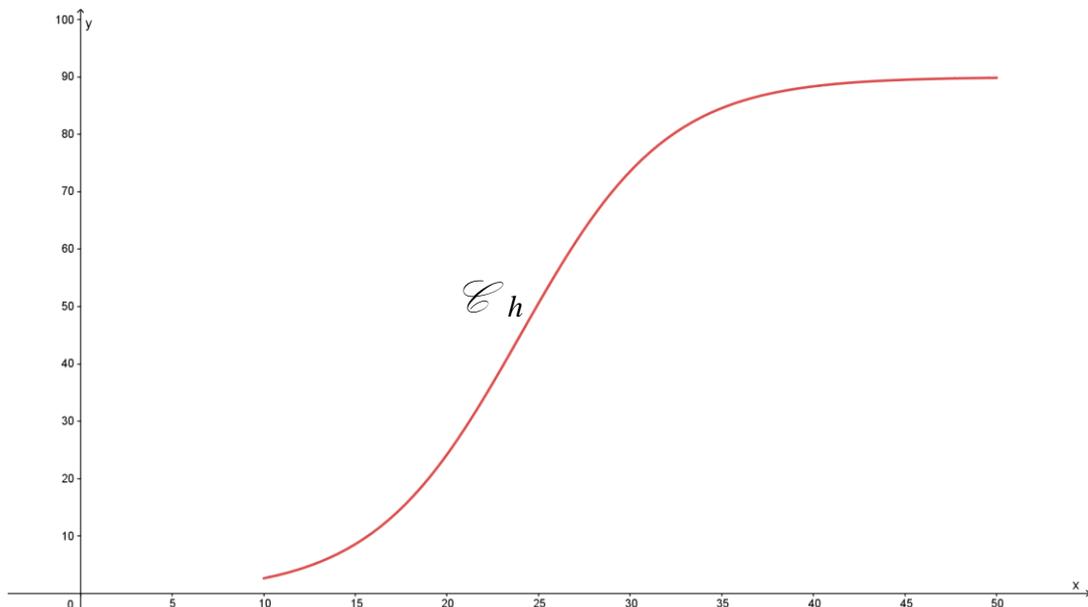
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

3. Au bout de combien de jours, peut-on estimer qu'un client ressent l'effet de « saturation » ?

Partie B

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction de satisfaction h est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par $h(x) = \frac{90}{1+e^{-0,25x+6}}$ où x représente le salaire annuel exprimé en milliers d'euros.

On admet que h est une fonction dérivable deux fois dérivable sur l'intervalle $[10; 50]$. La courbe \mathcal{C}_h de la fonction h est représentée ci-dessous :



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variations de la fonction « envie ». En donner une interprétation concrète.

2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.

3. Vérifier que , pour tout x de $[10; 50]$: $h''(x) = \frac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6}-1)}{(1+e^{-0,25x+6})^3}$

4. Résoudre dans l'intervalle $[10; 50]$, l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$.

5. En déduire la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$.

6. Déterminer, à partir de quel salaire annuel, on peut estimer que la fonction « envie » décroît.

7. On admet que le tableau de variations de h est donné ci-dessous :

x	10	50
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$\frac{90}{1+e^{3,5}}$	$\frac{90}{1+e^{-6,5}}$

a) Prouver que l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution α .

b) Le programme ci-dessous permet de déterminer une valeur approchée de cette solution à 0,001 près à l'aide de la technique de la dichotomie. Compléter ce programme.

```
from math import *
def h(x):
    y=90/(1+exp(-0.25*x+6))
    return(y)
```

```
a=10 ;b=50
while .....:
    m=(a+b)/2
    if .....:
        a=.....
    else:
        b=.....
print(a,b)
```

c) A l'aide de la technique de balayage ou du programme précédent, déterminer, en justifiant, pour quel salaire annuel, arrondi à l'euro, la satisfaction du salarié est de 80.

Exercice 4 : probabilités conditionnelles

Les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.

En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.

On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B .

2. a. Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.

b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

3. Calculer $P_H(\overline{B})$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 : probabilités conditionnelles

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

- a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
 - b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
 - c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».
2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?