## *Devoir à la maison numéro 3 (pour le 07/11/24)*

**Exercice 1 : équation différentielle $y' = ay + f$**

Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 4y = 4x^2 + 2x + 1$ et $y(0) = 3$
(on pourra chercher une solution particulière $p$ sous la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$)

$3y' + 4y = 4x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$\left(on\ reconnait\ y' = ay + f\ avec\ a = -\frac{4}{3}\ et\ f(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$

● Cherchons une solution particulière sous la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$. $\quad p'(x) = 2ax + b$

$p$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

équivaut à $p'(x) = -\frac{4}{3}p(x) + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

équivaut à $2ax + b = -\frac{4}{3}(ax^2 + bx + c) + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

équivaut à $2ax + b = -\frac{4}{3}ax^2 - \frac{4}{3}bx - \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

équivaut à $2ax + b = (-\frac{4}{3}a + \frac{4}{3})x^2 + \left(-\frac{4}{3}b + \frac{2}{3}\right)x - \frac{4}{3}c + \frac{1}{3}$

équivaut à $\begin{cases} -\frac{4}{3}a + \frac{4}{3} = 0 \\ 2a = -\frac{4}{3}b + \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3}c + \frac{1}{3} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ -\frac{4}{3}b + \frac{2}{3} = 2 \\ b = -\frac{4}{3}c + \frac{1}{3} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ -\frac{4}{3}b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{4}{3}c + \frac{1}{3} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ -\frac{4}{3}c + \frac{1}{3} = -1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ -\frac{4}{3}c = -\frac{4}{3} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{4}{3}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{4}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{-\frac{4}{3}x} + x^2 - x + 1$, $C \in \mathbb{R}$

$y(0) = 3 \Leftrightarrow Ce^0 + 0^2 - 0 + 1 = 3 \Leftrightarrow C = 2 \qquad y(x) = 2e^{-\frac{4}{3}x} + x^2 - x + 1$

**Exercice 2 : une piste pour le GO ?**

1.

Hypothèse : on suppose que la fonction $p$ est solution de l'équation différentielle $(E_1)$
c'est-à-dire $p'(t) = ap(t)(m - p(t))$

But : démontrer que la fonction $g = \frac{1}{p}$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2)$ : $y' = -amy + a$ c'est-à-dire $g'(t) = -amg(t) + a$

$$g'(t) = \left(\frac{1}{p(t)}\right)' = -\frac{p'(t)}{p^2(t)} = -\frac{ap(t)(m-p(t))}{p^2(t)} = \frac{-amp(t)+ap^2(t)}{p^2(t)} = -\frac{am}{p(t)} + a = -amg(t) + a$$

2. $y' = -amy + a$

$(on\ reconnait\ y' = ay + b\ en\ remplçant\ a\ par\ -am\ et\ b\ par\ a)$

● Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{m}$ car $-\frac{b}{a} = -\frac{-a}{am} = \frac{1}{m}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -amy$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-amt}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -amy + a$ sont les fonctions de la forme :$x \longmapsto Ce^{-amt} + \frac{1}{m}$, $C \in \mathbb{R}$

$$p(t) = \left(\frac{1}{g(t)}\right) = \frac{1}{Ce^{-amt} + \frac{1}{m}} = \frac{1}{\frac{Cme^{-amt}}{m} + \frac{1}{m}} = \frac{m}{1 + Cme^{-amt}}$$

On en déduit queque l'expression $p$ est de la forme :$p(t) = \frac{m}{1+Cme^{-amt}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3.La population des Etats-Unis de 1790 à 1910 a été étudiée par Pearl et Reed en 1920.
Avec l'origine des temps en 1790, les valeurs des paramètres sont alors donnés par $m = 197\,273$ (en milliers d'individus) , $Cm$=49,2  et $am = 0{,}031169134$

$$p(t) = \frac{197\,273}{1+49{,}2e^{-0{,}031169134t}}$$

a)

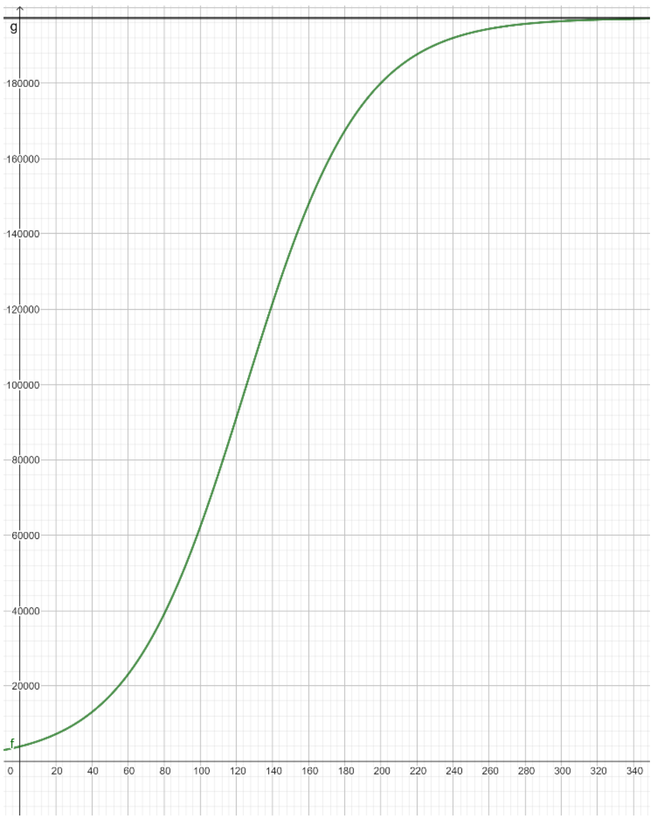
$$t \longrightarrow -0{,}031169134t \qquad X \longrightarrow e^X$$

$$t \to +\infty \qquad X \to -\infty \qquad e^X \to 0$$

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}031169134t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ . Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}031169134t} = 0$
D'après les opérations sur les limites (somme,produit et quotient) ,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{197\,273}{1+49{,}2e^{-0{,}031169134t}} = 197\,273$$

On en déduit que la droite d'équation y=197 273 est asymptote horizontale à la courbe de $f$ en +∞.
b)




c)Le but de la question est de déterminer en quelle année, selon ce modèle, la population maximale sera atteinte à un million près c'est-à-dire la 1ère année à partir de laquelle :

$$p(t) \geq 196\,273.$$

```
from math import *
def p(t):
    y=197273/(1+49.2*exp(-0.031169134*t))
    return(y)

t=0
while p(t)<196273 :
        t=t+1
print(t)
```

```
# Créé par ORDI, le 19/11/2024 en Python 3.7
from math import *
def p(t):
    y=197273/(1+49.2*exp(-0.031169134*t))
    return(y)

t=0
while p(t)<196273:
        t=t+1
print(t)
```

```
Console Python
*** Python 3.8.8
bit (AMD64)] on
*** Distant Pyth
>>>
*** Remote Inter
295
>>>
```

1790+295=2085
A l'aide de ce modèle, à partir de l'année 2025, la population maximale des Etats-Unis sera atteinte.

**<u>Exercice 3 : « l’envie d’avoir envie… »</u>**

On appelle fonction de satisfaction toute fonction *f* définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle [0;100].

Lorsque la fonction de satisfaction prend 100 comme valeur maximale, on dit qu’il a « *saturation* ».

On définit aussi la fonction « *envie* » comme étant la dérivée de la fonction de satisfaction.

**Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction de satisfaction *f* différent. Les deux parties sont indépendantes.**

## Partie A

1.

- $f = u \times v$
- $u(x) = 12{,}5x$ $\qquad$ $v(x) = e^{-0{,}125x+1}$

  $u'(x) = 12{,}5$ $\qquad$ $v'(x) = -0{,}125e^{-0{,}125x+1}$
- $f' = u' \times v + u \times v'$

Pour tout réel *x* de l’intervalle [0 ;30] ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12{,}5e^{-0{,}125x+1} + 12{,}5x \times -0{,}125e^{-0{,}125x+1} \\ &= 12{,}5e^{-0{,}125x+1} - 1{,}5625xe^{-0{,}125x+1} \\ &= (12{,}5 - 1{,}5625x)e^{-0{,}125x+1}. \end{aligned}$$

2. $e^{-0{,}125x+1}>0$ . $f'(x)$ a donc le même signe que $12{,}5 - 1{,}5625x$.

$$\begin{aligned} & 12{,}5 - 1{,}5625x > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1{,}5625x > -12{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{-12{,}5}{-1{,}5625} \\ \Leftrightarrow\ & x < 8 \end{aligned}$$

| $x$ | 0 | | 8 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | 100 | $\searrow$ | $375e^{-2{,}75}$ |

$f(0) = 0$ . $\quad f(8) = 12{,}5 \times 8 \times e^{-0{,}125\times 8+1} = 100.$

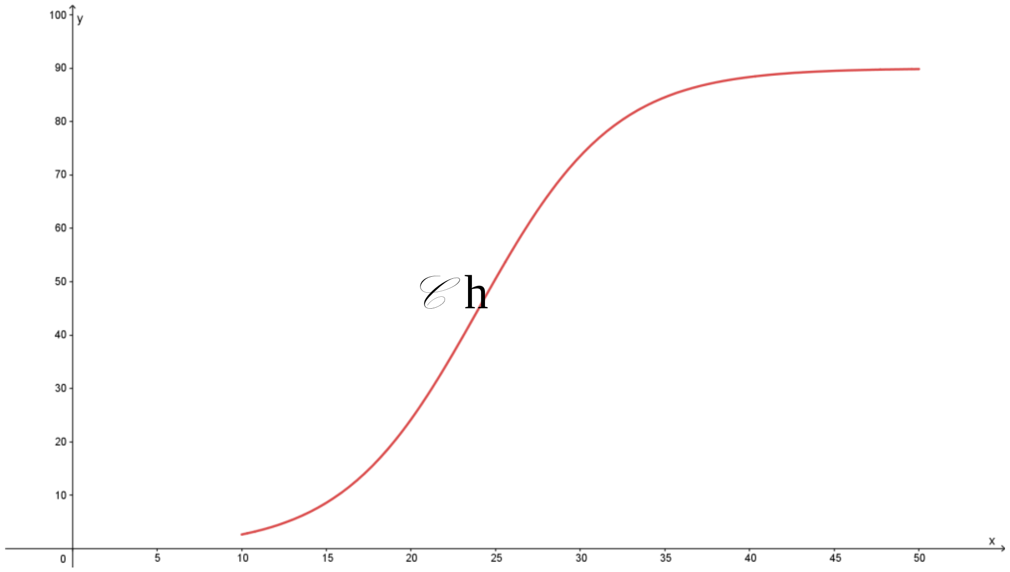
$f(30) = 12{,}5 \times 30 \times e^{-0{,}125\times 30+1} = 375e^{-2{,}75} \approx 23{,}97.$

$f$ est strictement croissante sur [0 ;8] et strictement décroissante sur [8 ;30]

3.D’après le tableau de variations de $f$, on peut estimer que l’effet de « saturation » arrive au bout de 8 jours de trek.

## Partie B

La direction des ressources humaines d’une entreprise modélise la satisfaction d’un salarié en fonction du salaire annuel qu’il perçoit. On admet que la fonction de satisfaction $h$ est définie sur l’intervalle $[10; 50]$ par $h(x) = \frac{90}{1+e^{-0{,}25x+6}}$ où *x* représente le salaire annuel exprimé en milliers d'euros.




1. La fonction $h$ est semble convexe sur [10 ;25] et concave sur [25 ;50].
La fonction « envie » c'est à dire $h'$ semble donc croissante sur [10 ;25] et décroissante sur [25 ;50].
L' « envie » croit lorsque le salaire est compris entre 10000 et 25000 euros et décroit à partir d'un salaire de 25 000 euros.

2.

$x \longrightarrow -0{,}25x + 6$

$X \longrightarrow e^X$

$+\infty \qquad -\infty \qquad 0$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}25x + 6 = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ . Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}25x+6} = 0$

D'après les opérations sur les limites (somme,produit et quotient) , $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{90}{1+e^{-0{,}25x+6}} = 90$

D'après ce modèle, il ne semple pas possible d'atteindre la saturation.

3. Vérifier que , pour tout $x$ de $[10; 50]$ : $h''(x) = \frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}(e^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$

- $h = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 90$ $\qquad v(x) = 1 + e^{-0{,}25x+6}$
  $u'(x) = 0$ $\qquad v'(x) = -0{,}25e^{-0{,}25x+6}$
- $h' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

Pour tout réel $x$ de l'intervalle [10 ;50] ,

$$h'(x) = \frac{0(1+e^{-0{,}25x+6}) - 90 \times (-0{,}25e^{-0{,}25x+6})}{(1+e^{-0{,}25x+6})^2} = \frac{22{,}5e^{-0{,}25x+6}}{(1+e^{-0{,}25x+6})^2}$$

$h' = \frac{u}{v}$

- $u(x) = 22{,}5e^{-0{,}25x+6}$ $\qquad v(x) = (1 + e^{-0{,}25x+6})^2$
  $u'(x) = 22{,}5 \times -0{,}25e^{-0{,}25x+6}$ $\qquad v'(x) = 2(1 + e^{-0{,}25x+6})(-0{,}25e^{-0{,}25x+6})$
  $= -5{,}625e^{-0{,}25x+6}$ $\qquad = -0{,}5(1 + e^{-0{,}25x+6})e^{-0{,}25x+6}$
- $h'' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

Pour tout réel $x$ de l'intervalle [10 ;50] ,

$$h''(x) = \frac{-5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^2 - 22{,}5e^{-0{,}25x+6}\left(-0{,}5\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)e^{-0{,}25x+6}\right)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^4}$$

$$= \frac{-5{,}625e^{-0{,}25x+6}(1+e^{-0{,}25x+6}) + 11{,}25e^{-0{,}25x+6}e^{-0{,}25x+6}}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$$

$$= \frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}(-1-e^{-0{,}25x+6}+2e^{-0{,}25x+6})}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$$

$$= \frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}(e^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$$

4. $e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-0,25x+6} > 1 \Leftrightarrow -0,25x + 6 > 0 \Leftrightarrow -0,25x > -6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{0,25}$
$\Leftrightarrow x < 24$ S=[10; 24[

5. Comme $5,625e^{-0,25x+6} > 0$ et $(1 + e^{-0,25x+6})^3 > 0$ alors $f''(x)$ est du signe de $e^{-0,25x+6} - 1$.

| $x$ | 10 | | 24 | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f'(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

La fonction $f$ est donc convexe sur [10 ;24] et concave sur [24 ;50].

6. L' « envie » décroit lorsque la fonction $f'$ est décroissante.
D'après ce qui précède l' « envie » décroit à partir d'un salaire de 24 000 euros.
7. On admet que le tableau de variations de $h$ est donné ci-dessous :

| $x$ | 10 | | 50 |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | |
| $h(x)$ | $\frac{90}{1+e^{3,5}}$ | $\nearrow$ | $\frac{90}{1+e^{-6,5}}$ |

a)Prouvons que l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution $\alpha$.

- $h$ est continue et strictement croissante sur [10 ;50].
- $80 \in [h(10); h(50)]$
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle [10 ;50].

b)Le programme ci-dessous permet de déterminer une valeur approchée de cette solution à 0,001 près à l'aide de la technique de la dichotomie. Compléter ce programme.

```
from math import *
def h(x):
    y=90/(1+exp(-0.25*x+6))
    return(y)

a=10 ;b=50
while b-a>0.001:
        m=(a+b)/2
        if h(m)<80:
            a=m
        else:
            b=m
print(a,b)
```

c)A l'aide de la technique de balayage, on trouve $\alpha \approx 32{,}318$
La satisfaction d'un salarié est de 80 lorsque son salaire annuel est proche de 32 000€.

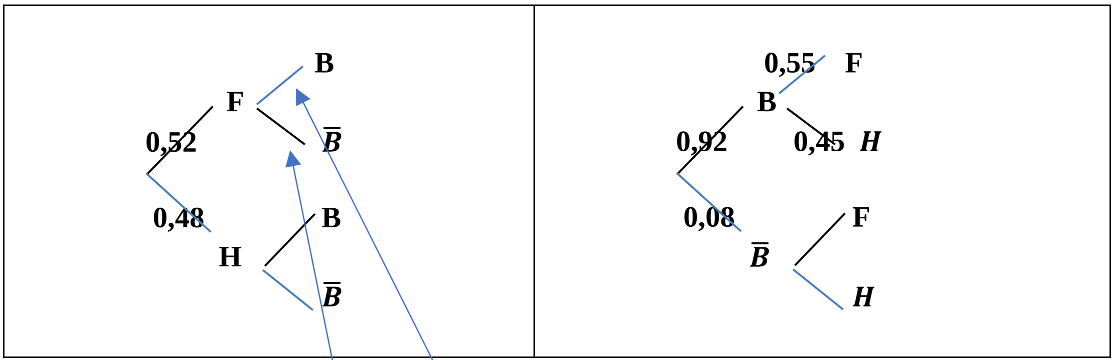
```python
from math import *
def h(x):
    y=90/(1+exp(-0.25*x+6))
    return(y)

a=10 ;b=50
while b-a>0.001:
        m=(a+b)/2
        if h(m)<80:
            a=m
        else:
            b=m
print(a,b)
```

Console Python

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021
bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active **
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized *
295
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized *
32.3175048828125 32.318115234375
>>>
```

## Exercice 4 :probabilités conditionnelles

**1.** Traduction des données :
$\boxed{P(F)=0{,}52}$ ; $\boxed{P(B)=0{,}92}$ ; $\boxed{P_B(F)=0{,}55}$.




2a) On a : $P(F\cap B)=P_B(F)\times P(B)=0{,}55\times 0{,}92=0{,}506$

**b.** On en déduit : $P_F(B)=\dfrac{P(F\cap B)}{P(F)}=\dfrac{0{,}506}{0{,}52}\approx \boxed{0{,}973}$.
La probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme vaut environ 0,973.

On en déduit aussi que $P_F(\overline{B})=0{,}027$.

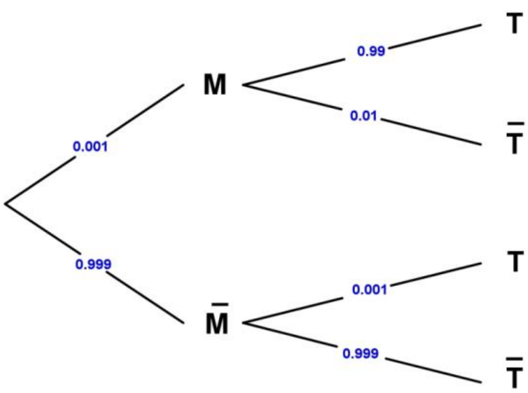
3. Comme H et $F$ forment une partition de l'univers , alors d'après la formule des probabilités totales , on a :
P($\overline{B}$)= $P(\overline{B}\cap H)+P(\overline{B}\cap F)$.

$P(\overline{B}\cap H)=0{,}08-0{,}52\times 0{,}027\approx 0{,}066$ $\quad P_H(\overline{B})=\dfrac{P(\overline{B}\cap H)}{P(H)}=\dfrac{0{,}066}{0{,}48}=0{,}1375$

Autre méthode :
Comme B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers , alors d'après la formule des probabilités totales , on a :
P(H)= $P(B\cap H)+P(\overline{B}\cap H)$.
0,48=0,92×0,45+ $P(\overline{B}\cap H)$.
Ainsi $P(\overline{B}\cap H)$=0,066
$P_H(\overline{B})=\dfrac{P(\overline{B}\cap H)}{P(H)}=\dfrac{0{,}066}{0{,}48}=0{,}1375$

## Exercice 5 :probabilités conditionnelles

**a.** On obtient l'arbre pondéré suivant :



**b.** En utilisant la formule des probabilités totales on a :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$
$P(T) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001 = 0{,}00099 + 0{,}000999 = 0{,}001989$

$P(T) = \boxed{1{,}989 \times 10^{-3}}$

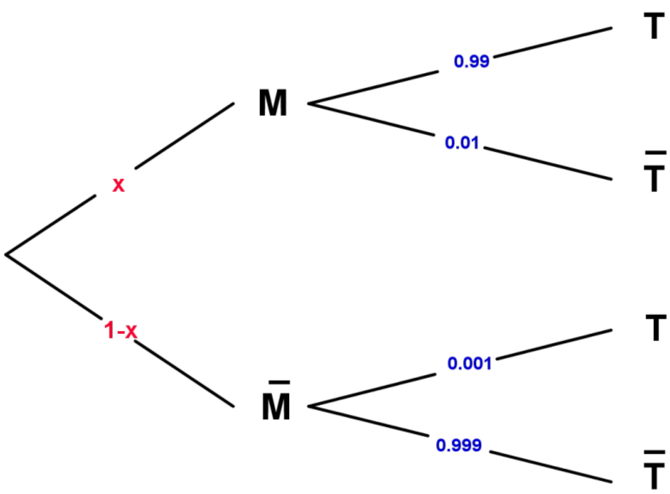
**c.** Affirmation : « si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade »

C'est à dire $P_T(M) < \dfrac{1}{2}$

On a $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}00099}{0{,}001989} \simeq 0{,}498 < 0{,}5$

**L'affirmation est vraie**.

2.




$P(T) = 0{,}99x + (1-x) \times 0{,}001 = 0{,}99x + 0{,}001 - 0{,}001x = 0{,}989x + 0{,}001$
$P(M \cap T) = 0{,}99x$
$P_T(M) = \dfrac{0{,}99x}{0{,}989x + 0{,}001}$

Remarque : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et on veut déterminer $x$ tel que : $P_T(M) \geqslant 0{,}95$

soit $\dfrac{0{,}99x}{0{,}989x + 0{,}001} \geqslant 0{,}95$

Le dénominateur étant strictement positif, on obtient :
$0{,}99x \geqslant 0{,}95(0{,}989x + 0{,}001)$
$0{,}99x - 0{,}95 \times 0{,}989x \geqslant 0{,}95 \times 0{,}001$
$0{,}05045x \geqslant 0{,}00095$
$x \geqslant \dfrac{0{,}00095}{0{,}05045} = \dfrac{95}{5045} \simeq$ **0,0188**

conclusion :
Il faut **au moins 1,88 % de malades** dans la population, pour que la probabilité d'une personne testée positivement soit malade, soit supérieure ou égale à 0,95.