Devoir à la maison numéro 4
Pour le 09/12/2024

Exercice 1 : Ouvrir le lien : mathssa.fr/conditionnement
Recopier ou imprimer l'énoncé puis traiter l'exercice

Exercice 2 : suite et probabilité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Exercice 3 : résolution de problème

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% par jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries. Le but de l'exercice est d'estimer au bout de combien de temps cet objectif sera réalisé.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :
u_n est la masse, en grammes, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus.
$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. Démontrer , par récurrence , que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.
2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Que peut on en déduire ?
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Compte tenu de l'étude précédente, il semble que le modèle est cohérent et que l'objectif sera atteint.

a) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Ecrire un programme pour répondre au problème posé dans la question précédente.
b) A l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur, répondre au problème posé.

Exercice 4 :étude d'une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Partie A : Etude d'une première fonction

On note f la fonction définie sur $[0,3; 1]$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,3; 1]$
4. Donner un encadrement de α à 0,1.
5. Dresser le tableau de signes de f.

Partie B : Etude d'une deuxième fonction – application économique

Une entreprise produit et vend des pièces pour hélicoptères. Pour des raisons de stockage, sa Production mensuelle est comprise entre 300 et 1 000 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,3; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

$g(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. a) D'après la question A3) , on sait que $f(\alpha) = 0$.Prouver que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

b) Démontrer $g(\alpha) = \alpha$.

2. On admet la dérivabilité de g .Montrer que pour tout réel x de $[0,3; 1]$, $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
3. Déterminer en justifiant le tableau de variations de g
4. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ?

Calculer ce bénéfice arrondi à 100 euros près.

Exercice 5 :la remontée du signe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

On admet que f est deux fois dérivable et que pour tout réel x,

$f'(x) = x^3 - 3x + 4$ et $f''(x) = 3x^2 - 3$.

1.a)Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution c.

b)Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de c.

c)Montrer que $f(c) = \frac{3c(4-c)}{4}$.

d) Déduire de la question b), le signe de $f(c)$.

2.Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.

Exercice 6 :futurs prépas

Soit f une fonction continue sur $[a\,; b]$ à valeurs dans $[a\,; b]$.

Démontrer que f admet au moins un point fixe c'est-à-dire qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.