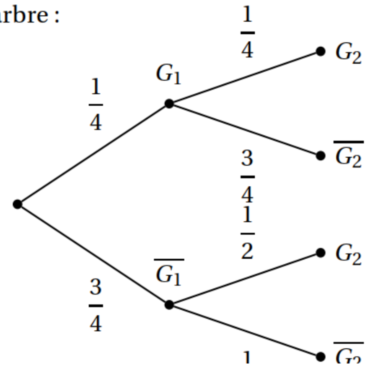
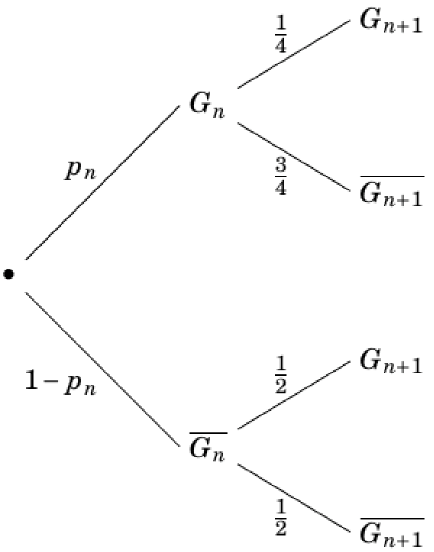
Exercice 2 : suite et probabilité

1. Illustrons la situation par un arbre :



1.
D'après la formule des probabilités totales : $p_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$

2.



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$= p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n$

$= -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

On peut conjecturer que la suite converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{4} u_n$

donc $\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n}$.

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = -\frac{1}{4}$.

b. $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n, $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On en déduit : $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c. $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5} = 0,4$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.

Exercice 3 : résolution de problème

$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2 u_n - 100$.

1. Démontrer , par récurrence , que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.

Soit P(n) la proposition « $u_n \geq 1\,000$ » (n entier naturel)

<u>1ère étape :initialisation</u>

vérifions que $P(0)$ est vraie

$u_0 = 1000$ et $1000 \geq 1\,000$ $P(0)$ est donc vraie

<u>2ème étape : hérédité</u>

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \geq 1\,000$

But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geq 1\,000$

$u_k \geq 1\,000$

$1{,}2u_k \geq 1\,200$

$1{,}2u_k - 100 \geq 1\,100$ or $1\,100 \geq 1\,000$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$

Or pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.

Ainsi $0{,}2u_n - 100 \geq 100$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .La suite (u_n) est donc croissante.

3.Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 500$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2u_n - 100 - 500 = 1{,}2u_n - 600 = 1{,}2\left(u_n - \frac{600}{1{,}2}\right) = 1{,}2v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}2$ de 1er terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

4. Pour tout entier $n, v_n = v_0 q^n = 500 \times 1{,}2^n$. On en déduit que :

$$u_n - 500 = 500 \times 1{,}2^n \; soit \; u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$ car $1{,}2 > 1$

On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5. Compte tenu de l'étude précédente, il semble que le modèle est cohérent et que l'objectif sera atteint.

a)

```
def seuil():
    n=0
    u=1000
    while u<=30000:
        n=n+1
        u=1.2*u-100
    return(n)
```

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, 15:08:03) [MSC v.1916 64 bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> seuil()
23
>>> |
```

b) Au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasssera 30kg.

<u>Exercice 4 :étude d'une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire</u>

<u>Partie A : Etude d'une première fonction</u>

On note f la fonction définie sur $[0{,}3; 1]$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Pour tout réel x *de* $[0{,}3; 1]$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$.
2. Or pour tout x *de* $[0{,}3; 1]$, 1>0 et $e^{-x} > 0$. On en déduit que $f'(x) > 0$.

x	$0{,}3$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$0{,}3 - e^{-0{,}3}$	$\nearrow$	$1 - e^{-1}$

f est strictement croissante sur $[0{,}3; 1]$.$f(0{,}3) = 0{,}3 - e^{-0{,}3}$ $f(1) = 1 - e^{-1}$

3.

- f est continue et strictement croissante sur $[0{,}3\,;1]$.
- $0 \in [f(0{,}1); f(1)]$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a\,;b]$.

4.Par balayage : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ et $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$

5.

x	0,3		α		1
$f(x)$	$0{,}3 - e^{-0{,}3}$	↗	0	↗	$1 - e^{-1}$
$f(x)$		-	0	+	

Partie B : Etude d'une deuxième fonction – application économique

1. a) D'après la question A3) , on sait que $f(\alpha) = 0$. On en déduit que $\alpha - e^{-\alpha} = 0$.

   Soit $\alpha = e^{-\alpha}$. Il vient alors , $\alpha = \frac{1}{e^{\alpha}}$

   Par passage à l'inverse, on obtient : $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

b) $g(\alpha) = \frac{1+\alpha}{1+e^{\alpha}} = \frac{1+\alpha}{1+\frac{1}{\alpha}} = \frac{1+\alpha}{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \alpha.$

2. On admet la dérivabilité de g .

- $g = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 1 + x$ $\qquad v(x) = 1 + e^{x}$
  $u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = e^{x}$
- $g' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Pour tout réel x de $[0{,}3; 1]$, $g'(x) = \frac{1(1+e^x)-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x-e^x-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(e^{-x}-x)}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

3. Pour tout réel x de $[0{,}3; 1]$, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$.

Ainsi $g'(x)$ est du signe de -$f(x)$.

x	0,3		α		1
$f(x)$		-	0	+	
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$\frac{1{,}3}{1+e^{0{,}3}}$	↗	α	↘	$\frac{2}{1+e}$

g est strictement croissante sur $[0{,}3\,;\alpha]$ et est strictement décroissante sur $[\alpha; 1]$

4. D'après le tableau de variations, g admet un maximum en α de valeur $g(\alpha) = \alpha$.
   Il faut donc produire 570 pièces (560 acceptées) pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

Ce bénéfice maximal est de 5700 euros (5 600 euros acceptés).

<u>Exercice 5 :la remontée du signe</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{3}{2} \times 2x + 4 = x^3 - 3x + 4$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

   Etudions les variations de f'. Pour cela , on étudie le signe de sa dérivée f''

   f'' est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 *et* 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+ Signe de a=3	0	- Signe de – a=-3	0	+ Signe de a=3	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

f' est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ *et* $[1\ ;\ +\infty[$

f' est strictement décroissante sur $[-1\ ;1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x+4 = +\infty$.

On a une FI du type « ∞-∞ »

$x^3 - 3x + 4 = x^3(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3})$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^3} = 0$.Donc, par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 1$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$ Donc, par limite d'un produit :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$ soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 3x + 4 = -\infty$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x + 4 = +\infty$

$f'(-1) = (-1)3\ - 3(-1) + 4 = 6$

$f'(1) = 13\ - 3 + 4 = 2$

- sur $]-\infty; -1]$

*f' est continue et est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$

* $0 \in]-\infty; 6]$

*D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution c sur $]-\infty; -1]$

La fonction f' est décroissante sur [-1 ;1] puis croissante sur $[1\ ;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$ de valeur $f'(1) = 2$.Il est clair que l'équation $f'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1\ ;+\infty[$

Conclusion : l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution c appartenant à l'intervalle $]-\infty;-1]$

b)On utilise la technique de balayage : $-3 < c < -2$ $\quad -2{,}2 < c < -2{,}1$ $\quad -2{,}20 < c < -2{,}19$

c)on a $f'(c) = 0 \; soit \; c^3 - 3c + 4 = 0 \; soit \; c^3 = 3c - 4$

$f(c) = \frac{c^4}{4} - \frac{3}{2}c^2 + 4c = \frac{c^4 - 6c^2 + 16c}{4} = \frac{c(c^3 - 6c + 16)}{4} = \frac{c(3c - 4 - 6c + 16)}{4} = \frac{c(-3c + 12)}{4} = \frac{3c(4 - c)}{4}$

d)Or $-2{,}20 < c < -2{,}19$ ainsi $3c < 0$ ainsi que $4 - c > 0$.

On en déduit que $\frac{3c(4-c)}{4} < 0$

2. Cherchons le signe de *f'(x)*

x	-∞	c	-1	1	+∞
f'(x)	-∞	0	6	2	+∞
f'(x)	-	0	+		

On en déduit les variations de f.

x	-∞	*c*	+∞
f'(x)	-	*0*	+
f(x)	+∞	*f(c)*	+∞

f est strictement croissante sur [c ;+ ∞[et strictement décroissante sur]- ∞ ;c].

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x = +\infty$ (même technique que dans la question 1a))

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x = +\infty$

sur $]-\infty; c]$:

*f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; c]$

*$0 \in [f(c); +\infty[$

*D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation *f(x)=0* admet une unique solution α sur $]-\infty; c]$.

On fait la même chose sur $[c; +\infty[$

Conclusion : l'équation *f(x)=0* admet exactement 2 solutions.

Exercice 6 :futurs prépas

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $[a\,;b]$.

Soit g la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ car pour tout x de [a ;b], $a \leq f(x) \leq b$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car pour tout x de [a ;b], $a \leq f(x) \leq b$

- g est continue sur $[a\,;b]$.
- $0 \in [g(b); g(a)]$
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $[a\,;b]$.

Il existe donc au moins un réel c tel que $g(c) = 0$ soit $f(c) = c$.