Devoir à la maison numéro 5
Pour le 17/01/2025

Exercice 1 :

Donner sans justifier la ou les bonnes réponses.

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2;4]$ telle que :

$$h(-1) = 0, \qquad h(1) = 4, \qquad h(3) = -1.$$

On peut affirmer que :

a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

1. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation

$$\sin(x) = 0,1$$

admet :

a. zéro solution **b.** une solution
c. deux solutions **d.** quatre solutions

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ par

$$f(x) = x + \sin(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable.

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$
b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$
c. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ un unique point d'inflexion
d. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ exactement deux points d'inflexion

3. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées.

Quel est le nombre de tirages possibles, **sans tenir compte de l'ordre des numéros**?

a. 50^3 **b.** $1 \times 2 \times 3$ **c.** $50 \times 49 \times 48$ **d.** $\dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

4. On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.

Quel est le nombre de listes ordonnées possibles?

a. 2×10 **b.** 2^{10}
c. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$ **d.** $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10}{1 \times 2}$

5. On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On considère la liste ordonnée des n résultats.

Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux fois « pile » dans cette liste?

a. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ **b.** $\dfrac{n(n-1)}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
c. $1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ **d.** $\left(1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 3 :

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;

— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

   b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. **a.** Déterminer la limite de la suite (a_n).
   b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def   seuil() :
      n = 0
      A = 1 700
      while ... :
          n=n+1
          A = ...
      return...
```

   b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

8.Retrouver ce dernier résultat en résolvant une inéquation.

Exercice 4 :

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers. On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a :$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.
L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre son objectif.
On définit la suite (v_n) par , pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne cet objectif.

Partie B

Un autre apiculteur dispose la première année de 50 000 abeilles.
On désigne par v_n le nombre d'abeilles la n-ième année (exprimée en centaine de milliers cette fois-ci).Ainsi $v_1 = 0{,}5$. On peut modéliser l'évolution du nombre d'abeille par la formule de récurrence suivante :
$v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n}$ (n entier naturel non nul)

1. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{n}{n+1}$.
2. Etudier la limite de la suite (v_n). De combien d'abeilles disposera l'apiculteur à long terme ?

Exercice 5 :

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

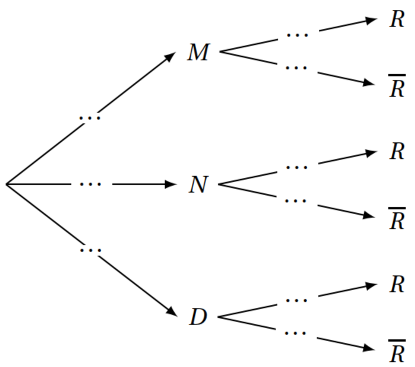
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}651\,4$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

   b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

   a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

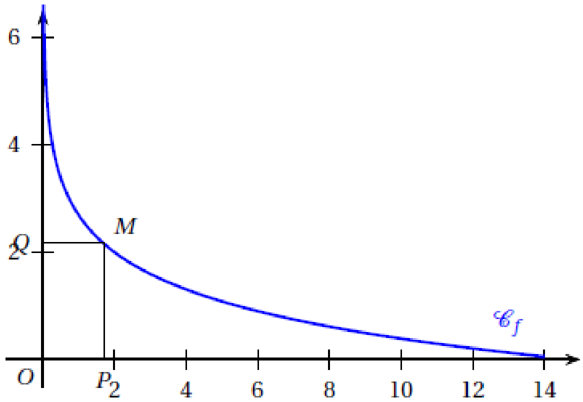
   b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant. Justifier !