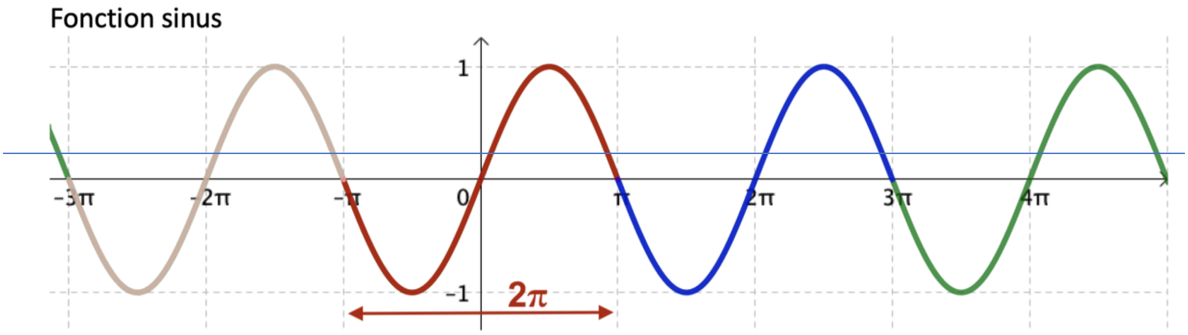
<u>Exercice 1 :</u>
Réponse c)

<u>Exercice 2 :</u>
1.Réponse c)



Sur $[0\,;2\pi]$, l'équation $sin(x) = 0{,}1$ admet exactement 2 solutions.

2. Réponse b)

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;\pi]$, $f(x)=x+\sin(x)$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0;\pi]$, $f'(x)=1+\cos(x)$ et $f''(x)=-\sin(x)$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;\pi]$, $f''(x)\leqslant 0$ donc f est concave sur $[0;\pi]$

3. **Réponse : d**
   <u>*Preuve non demandée*</u>
   . Tirer 3 boules, successivement sans remise et ne pas considérer l'ordre du tirage, revient à tirer simultanément 3 boules de l'urne simultanément 3 boules de l'urne donc le nombre de « tirages » est : $\binom{50}{3} = \frac{50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3}$.

4. **Réponse : b**
   <u>*Preuve non demandée*</u>
   Pour chaque tirage il y a 2 résultats distincts et on effectue 10 tirages indépendants.
   Donc le nombre de listes possibles est : 2^{10}.

5. **Réponse : d**

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{2}$.
La probabilité d'obtenir au plus de fois « pile » dans la liste est égale à : $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$P(X=0)=q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(X=1)=\binom{n}{1}\ p^1\times q^{n-1}=n\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(X=2)=\binom{n}{2}\ p^2\times q^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)=\left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 3 :

1. Une baisse de 15 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1-\frac{15}{100}=0{,}85$.

Une baisse de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1-\frac{10}{100}=0{,}9$.
$a_1=0{,}85a_0+0{,}1b_0=0{,}85\times 1\,700+0{,}1\times 1\,300=1\,575$
$b_1=0{,}9b_0+0{,}15a_0=0{,}9\times 1\,300+0{,}15\times 1\,700=1\,425$
En 2025, le club A comptera 1 575 adhérents et le club B 1 425.

2. Pour tout entier naturel n, $a_n+b_n=3\,000$.

3. Pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1}=0{,}85a_n+0{,}1b_n=0{,}85a_n+0{,}1(3\,000-a_n)$
$a_{n+1}=0{,}85a_n+300-0{,}1a_n=0{,}75a_n+300$.

4. a. Soit $P(n)$ la proposition « $1\,200\le a_{n+1}\le a_n\le 1\,700$ »

1ère étape :initialisation

vérifions que P(0) est vraie
$a_0=1\,700$ et $a_1=1\,575$
Donc, $1\,200\le a_1\le a_0\le 1\,700$
P(0) est donc vraie

2ème étape : hérédité

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque P(k) est vraie c'est-à-dire $1\,200\le a_{k+1}\le a_k\le 1\,700$

But : démontrons alors que P(k+1) est vraie c'est-à-dire $1\,200\le a_{k+2}\le a_{k+1}\le 1\,700$

$1\,200\le a_{k+1}\le a_k\le 1\,700$
$0{,}75\times 1\,200\le 0{,}75a_{k+1}\le 0{,}75a_k\le 0{,}75\times 1\,700$
$900+300\le 0{,}75a_{k+1}+300\le 0{,}75a_k+300\le 1\,275+300$
$1\,200\le a_{k+2}\le a_{k+1}\le 1\,575$ or $1575\le 1\,700$
$1\,200\le a_{k+2}\le a_{k+1}\le 1\,700$

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

$\forall n\in\mathbb{N}, 1\,200\le a_{n+1}\le a_n\le 1\,700$

b. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 1 200, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est donc convergente.

5. a. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=a_{n+1}-1\,200=0{,}75a_n+300-1\,200=0{,}75(a_n+1\,200)-900=0{,}75a_n$
donc, (v_n)est géométrique de raison $q=0{,}75$ et de premier terme $v_0=a_0-1\,200=500$.
b. $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0q^n=500\times 0{,}75^n$
c. $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=v_n+1\,200=500\times 0{,}75^n+1\,200$

6. $-1<0{,}75<1$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}75^n=0$
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1\,200$
Au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'adhérents va se rapprocher de plus en plus de 1 200.

7.

```python
def seuil():
    n=0
    A=1700
    while A>1280:
        n=n+1
        A=0.75*A+300
    return n
```

8. On résout l'inéquation
$a_n\le 1280$
$500\times 0{,}75^n+1\,200\le 1280$
$500\times 0{,}75^n\le 80$
$0{,}75^n\le\frac{80}{500}$
$\ln(0{,}75^n)\le\ln(0{,}16)$
$n\ln(0{,}75)\le\ln(0{,}16)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}16)}{\ln(0{,}75)}$ $\quad$ $(\ln(0{,}75) < 0 \; car \; 0{,}75 < 1)$
De plus, $\frac{\ln(0{,}16)}{\ln(0{,}75)} \approx 6{,}37$
Donc, $n \geq 7$
Au bout de 7 ans, donc en 2031, le nombre d'adhérents du club A sera inférieur ou égal à 1 280.

Exercice 4 :

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

On a :$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + c$.
On définit la suite (v_n) par , pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. $Pour\ tout\ entier\ n,$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0{,}8u_n + c - 5c = 0{,}8u_n - 4c = 0{,}8\left(u_n - \frac{4c}{0{,}8}\right) = 0{,}8(u_n - 5c) = 0{,}8v_n.$$

donc, (v_n)est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

2. Pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = (1 - 5c) \times 0{,}8^n$
$u_n = v_n + 5c = (1 - 5c) \times 0{,}8^n + 5c$

2. $-1 < 0{,}8 < 1$, donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$
Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5c$
L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$.
Par conséquent $5c = 10$ soit $c = 2$.

Partie B

On désigne par v_n le nombre d'abeilles la n-ième année (exprimée en centaine de milliers cette fois-ci).Ainsi $v_1 = 0{,}5$. On peut modéliser l'évolution du nombre d'abeille par la formule de récurrence suivante :
$v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}$ (n entier naturel non nul)

1.Soit $P(n)$ la proposition « $v_n = \frac{n}{n+1}$ » (n entier supérieur ou égal à 1)

1ère étape :initialisation

vérifions que P(1) est vraie
$v_1 = 0{,}5 \quad or \; \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad donc \;\; v_1 = \frac{1}{1+1}$
P(1) est donc vraie

2ème étape : hérédité

Hypothèse : on suppose que pour un entier k≥1 quelconque P(k) est vraie c'est-à-dire $v_k = \frac{k}{k+1}$
But : démontrons alors que P(k+1) est vraie c'est-à-dire $v_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$v_{k+1} = \frac{1}{2 - v_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2(k+1) - k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}*, v_n = \frac{n}{n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}*, v_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$
3. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

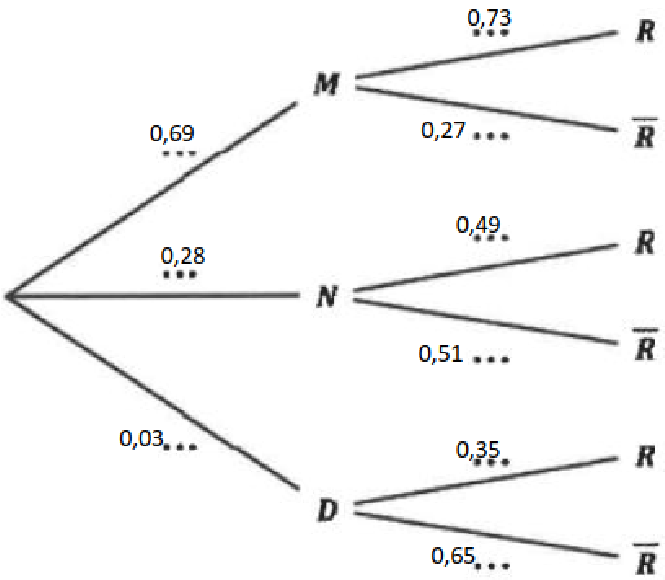
A long terme , l'apiculteur disposer a de 100 000 abeilles .

Exercice 5 :

D'après l'énoncé, $P(M) = 0{,}69$, $P(N) = 0{,}28$, $P_M(R) = 0{,}73$, $P_N(R) = 0{,}49$ et $P_D(R) = 0{,}35$.

Partie A :

1. $P(D) = 1 - (P(M) + P(N)) = 1 - (0{,}69 + 0{,}28) = 0{,}03$
   $P_M(\bar{R}) = 1 - P_M(R) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$ $\quad P_N(\bar{R}) = 1 - P_N(R) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$
   $P_D(\bar{R}) = 1 - P_D(R) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$



2. On calcule $P(D \cap R)$.
   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$
   La probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est de 0,0105.

3. $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = \mathbf{0{,}1863}$.
   La probabilité que le déchet soit minéral et non dangereux et recyclable est de 0,1863.

4. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$
   $P(R) = P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + P(D) \times P_D(R)$
   $P(R) = 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}5037 + 0{,}1372 + 0{,}0105$

   $$\boldsymbol{P(R) = 0{,}6514}$$

5. On calcule $P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{P(N) \times P_N(R)}{P(R)} = \frac{0{,}28 \times 0{,}49}{0{,}6514} \approx 0{,}2106$
   La probabilité que le déchet prélevé soit non minéral et non dangereux sachant qu'il est recyclable est d'environ 0,2106.

Partie B :

1. **a.** On sait que X suit une loi binomiale. L'épreuve de Bernoulli est répétée 20 fois et son succès est « le déchet est recyclable » de probabilité 0,6514.
Ainsi, **la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(20\,;0,6514)$.**

   b. On calcule $P(X = 14)$
$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0{,}6514^{14} \times (1 - 0{,}6514)^6 = 38760 \times 0{,}6514^{14} \times 0{,}3486^6$
$P(X = 14) \approx 0{,}1723$
Ainsi, **la probabilité que 14 déchets de l'échantillon prélevé soient recyclables est d'environ 0,1723.**

2. **a.** Prélever un déchet est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le déchet est recyclable » de probabilité 0,6514.
On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante (le nombre de déchets est suffisamment grand pour pouvoir considérer cette situation comme un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0{,}6514$.
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de déchets recyclables). Cette variable aléatoire suit donc la loi binomiale $B(n\,;0{,}6514)$.
Pour tout entier naturel $n > 0, p_n = P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}6514^0 \times 0{,}3486^n$
$\boldsymbol{p_n = 1 \times 1 \times 0,3486^n = 0,3486^n}$

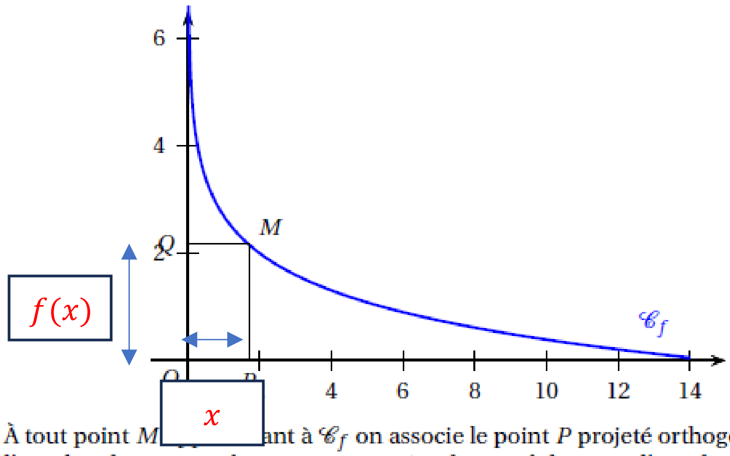
   b. On cherche $P(Y \geq 1)$
Pour tout entier naturel $n > 0$,
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - p_n = 1 - 0{,}3486^n$
On cherche donc le plus entier naturel n tel que $1 - p_n > 0{,}9999$.
$1 - p_n > 0{,}9999 \Leftrightarrow p_n < 0{,}0001 \Leftrightarrow 0{,}3486^n < 0{,}0001$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}3486^n) < \ln 0{,}0001$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow n \ln 0{,}3486 < \ln 0{,}0001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}3486}$ car la fonction logarithme népérien est strictement négative sur $]0\,;1[$.
Or, $\frac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}3486} \approx 8{,}74$, donc $n \geq 9$. Ainsi, **le plus petit naturel n tel que la probabilité qu'au moins un déchet de l'échantillon soit recyclable soit supérieur à 0,9999 est 9.**

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M ant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

L'aire du rectangle OPMQ est $g(x) = xf(x) = x(2 - ln\left(\frac{x}{2}\right))$

g est dérivable sur]0 ;14] en tant que produit de fonctions qui le sont.

$*g = uv$

$*u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$v(x) = 2 - ln\left(\frac{x}{2}\right) \qquad v'(x) = 0 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{x}$

$*g' = u'v + uv'$

$g'(x) = 1(2 - ln\left(\frac{x}{2}\right)) - x \times \frac{1}{x} = 2 - ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$g'(x) > 0 \; si \; 1 - ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

$si \; ln\left(\frac{x}{2}\right) < 1$

$si \; \left(\frac{x}{2}\right) < e^1$

$si \;\; x < 2e.$

x	0		2e		14
$g'(x)$	‖	+	0	-	
$g(x)$	‖	↗	2e	↘	14(2-ln(7))

g est strictement croissante sur]0 ;2e] et strictement décroissante sur [2e ;14].

g admet donc un maximum en $x = 2e$ de valeur $g(2e) = 2e(2 - \ln(e)) = 2e(2 - 1) = 2e$

L'aire du rectangle est maximale en M de coordonnées $(2e\,;1)$ car $f(2e) = 1$.