Devoir à la maison numéro 6
Pour le 14/02/2025

Exercice 1 :loi binomiale

1. Donner la ou les affirmations exactes et justifier votre choix.

On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ p)$.

On sait que $P(X=0)=\dfrac{1}{125}$.

On peut affirmer que :

A. $p(X=1)=\dfrac{4}{5}$

B. $p(X=1)=\dfrac{124}{125}$

C. $p=\dfrac{4}{5}$

D. $p=\dfrac{1}{5}$

2.On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=0{,}21$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice $P(21<X\leq 35)$

Exercice 2 : surbooking (idée GO)

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il y a de place dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé.
On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager à 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque est indépendante de celle des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

4. Calculer $P(X\leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250€.
Si plus de 200 passagers de présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600€ à chaque passager lésé.
On appelle :
Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet.
C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaires de la compagnie aérienne sur ce vol.
On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	

5.a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y=6)$.
5.b. Justifier que : $C=51500-850Y$.
5.c. Donner la loi de probabilité, de la variable C sous la forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
5.d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Exercice 3 : intervalle de fluctuation à 95% et prise de décision (idée GO)

Une compagnie d'assurances estime que 95% de clients sont satisfaits.

1.On choisit 200 clients au hasard et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients satisfaits. On suppose le nombre de clients suffisamment important pour assimiler le choix des 400 clients à un tirage aléatoire avec remise.

a) Donner sans justifier la loi suivie par X et en donner les paramètres.

b) A l'aide de votre cours, déterminer le plus petit intervalle $[a\,;b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.

c) Donner au seuil de 95%, l'intervalle dans lequel se situe la fréquence des clients satisfaits pour des échantillons de 200 personnes.

2.On effectue une enquête de satisfaction auprès de 200 clients. Sur ces 200 clients, 182 expriment leur satisfaction. Ce résultat contredit il l'affirmation de la compagnie d'assurance ? Justifier.

Exercice 4 :probabilité que dans une assemblée au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour (idée GO)

1.Dans une assemblée de n personnes, déterminer la probabilité que personne ne soit né le même jour.

2.Démontrer que la probabilité que dans une assemblée de n personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est $p_n = 1 - \frac{365\times364\times\ldots\times(365-n+1)}{365^n}$.

Cette formule s'écrit aussi : $1 - \frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\ldots\times\frac{365-n+1}{365}$

3.Compléter le programme python ci-dessous afin d'afficher les 30 premières valeurs de p_n.

```
def p(n) :
    a=365/365
    for i in range(1,…) :
        a=……………………..
    return 1 − a

for n in range(1,30):
   print(n, p(n))
```

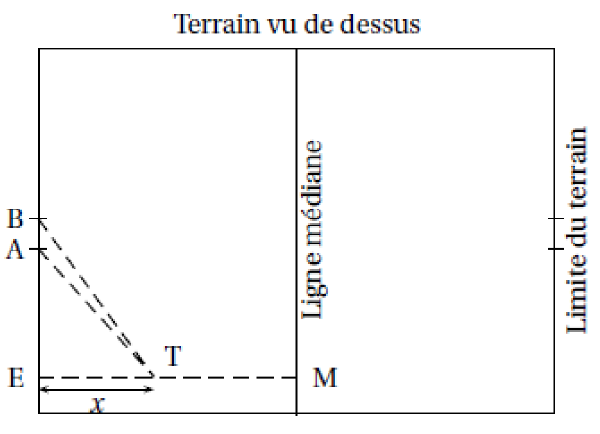
Ecrire le programme sur Python et joindre une capture d'écran.

4.De combien de personnes doit être composée l'assemblée afin qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour.

Exercice 4 : optimisation et rugby (idée GO)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m .
On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. Donner sans justifier $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

2. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.
Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

3. Répondre à la problématique posée. *(on admettra que γ est maximum si tan(γ) est maximum)*

<u>Exercice 5 :étude de la fonction tangente</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
1.Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $cos(x) = 0$ et en déduire le domaine de définition de f .
2.Démontrer que f est une fonction impaire.
3.Démontrer que f est une fonction π périodique.
3.A l'aide des questions 2 et 3, proposer un intervalle d'étude de f d'amplitude la plus petite possible.
4. Etudier $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x)$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
5.Démontrer que , pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
6.Eudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle$[0\,;\frac{\pi}{2}[$, On démontrera que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
7. Représenter sur feuille une allure possible de la courbe de f sur $]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$
(on graduera les abscisses de $\frac{\pi}{4}$ en $\frac{\pi}{4}$)