Exercice 1 :loi binomiale

1. X suit une loi binomiale de paramètres $3, p$

$P(X=0)=\binom{3}{0}p^0(1-p)^3=\frac{1}{125}$ $soit$ $(1-p)^3=\frac{1}{125}$.

$On\ en\ déduit\ que\ 1-p=\frac{1}{5}\ soit\ p=\frac{4}{5}$ $.L'affirmation\ C\ est\ vraie!$

$P(X=1)=\binom{3}{1}p^1(1-p)^2=3p(1-p)^2$ Or $p=\frac{4}{5}$

$P(X=1)=3\times\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$

Seule l'affirmation C est donc vraie !

2.On suppose que

$P(21<X\leq 35)=P(22\leq X\leq 35)=P(X\leq 35)-P(X\leq 21)\approx 0{,}00386$

Exercice 2 : surbooking (idée GO)

1. On répète 206 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli :
(l'acheteur du billet se présente à l'embarquement :succès ; la **probabilité du succès** est égale à $0{,}95$)
Cette expérience est un **schéma de Bernoulli de paramètres $n=206$ et $p=0,95$.**
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n=206$ et $p=0{,}95$ $soit$ $B(206;0{,}95)$

2.$E(X)=np=206\times 0{,}95=195{,}7$
En moyenne, sur 206 billets vendus, on peut compter 196 passagers.

3.

$P(X=201)=\binom{206}{201}\times 0{,}95^{201}\times 0{,}05^{5}\simeq 0{,}03063$ (en utilisant la calculatrice).

$P(X=201)=0{,}031$ (au millième près).

4.

$P(X\leqslant 200)\simeq 0{,}94775$

$P(X\leqslant 200)=0{,}948$ (au millième près)

Pour 94,8 % des vols, il y aura au plus 200 passagers à l'embarquement donc aucun passager lésé.

5.a. On a $P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)$
On obtient : $P(X=6)=0{,}00003$.

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	0.00003

5.b. Pour chaque passager lésé, la compagnie aérienne rembourse le billet : 250€ et 600€ de pénalité soit 850€.
Y est le nombre de passagers lésés.
La compagnie aérienne vend 206 billets à 250€ soit un total de $206\times 250=51500$ € .
Pour Y personnes lésées le chiffre d'affaires est égal à : $C=51500-850\,Y$.

5.c. $c_0=51500$ $P(c_0)=P(Y=0)=0{,}94775$

$c_1=51500-850=50650$ $P(c_1)=P(Y=1)=0{,}03063$

$c_2=51500-2\times850=49800$ $P(c_2)=P(Y=2)=0{,}03063$

$c_3=51500-3\times850=48950$ $P(c_3)=P(Y=3)=0{,}01441$

$c_4=51500-4\times850=48100$ $P(c_4)=P(Y=4)=0{,}00151$

$c_5=51500-5\times850=47250$ $P(c_5)=P(Y=5)=0{,}00028$

$c_6=51500-6\times850=46400$ $P(c_6)=P(Y=6)=0{,}00003$

c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(C=c_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	0.00003

On peut calculer $E(C)$ en utilisant le tableau ci-dessus ou en remarquant que $E(C)=51500-850\times E(Y)$
On calcule $E(Y)=0{,}08324$ donc $E(C)=51500-850\times0{,}08324=51429{,}246$.
En arrondissant à l'euro : $E(C)=51429\,€$.

5.c. Si la compagnie vend exactement 200 billets son chiffre d'affaires est $250\times200=50000\,€$, en pratiquant le surbooking le chiffre d'affaires moyen est 51429€ donc la compagnie gagne en moyenne 1429€ de chiffre d'affaires, par vol.

Exercice 3 : intervalle de fluctuation à 95% et prise de décision (idée GO)

Une compagnie d'assurances estime que 95% de clients sont satisfaits.

1.a) X suit la loi binomiale de paramètres n=200 et p=0,95 B(200 ;0,95).
b) On cherche la plus petite valeur de a telle que $P(X \leq a) > 0{,}025$. En tabulant la calculatrice (binomFRep(200,0.95,X) , on trouve $a = 184$.
On cherche la plus petite valeur de b telle que $P(X \leq b) > 0{,}975$. En tabulant la calculatrice (binomFRep(200,0.95,X) , on trouve $b = 196$.

Le plus petit intervalle $[a\,;b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$ est [184 ; 196].

c) Si on prend des échantillons de 200 clients , il y a au moins 95% de chances qu'il y ait entre 184 et 296 clients satisfaits. $\frac{184}{200} = 0{,}92$ $\frac{196}{200} = 0{,}98$
si on prend des échantillons de 200 clients , il y a au moins 95% de chances qu'il y ait entre 92% et 98% de clients satisfaits.
2.On effectue une enquête de satisfaction auprès de 200 clients. Sur ces 200 clients, 182 expriment leur satisfaction soit une fréquence de $\frac{182}{200} = 0{,}91$.
$0{,}91 \notin [0{,}92\,;0{,}98]$
On peut donc remettre en cause l'affirmation de la banque et penser qu'il n'y a pas 95% de clients satisfaits.

Exercice 4 :probabilité que dans une assemblée au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour (idée GO)

1.On choisit n dates d'anniversaire au hasard. Il y a 365^n choix possibles.
(nombre de n uplets d'un ensemble à 365 éléments)
Soit A_n l'évènement «les dates d'anniversaires sont toutes différentes »
Il y a $365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1)$ choix possibles
(nombre de n uplets distincts d'un ensemble à 365 éléments)

$$P(A_n) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n}$$

2. Soit B_n l'évènement : « au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour »
Il est clair que $B_n = \overline{A_n}$. $P(B_n) = 1 - P(A_n) = 1 - \frac{365\times364\times\ldots\times(365-n+1)}{365^n}$.

Cette formule s'écrit aussi : $1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\ldots\times\frac{365-n+1}{365}$

3.

```
def p(n) :
    a=365/365
    for i in range(1,n) :
        a= a * (365-i)/365
    return 1 − a

for n in range(1,31):
   print(n, p(n))
```

```
1 0
2 0.002739726027397249
3 0.008204165884781456
4 0.016355912466550326
5 0.02713557369979369
6 0.04046248364911165
7 0.05623570309597559
8 0.07433529235166925
9 0.09462383388916695
10 0.11694817771107779
11 0.14114137832173335
12 0.1670247888380647
13 0.19441027523242982
14 0.22310251200497344
15 0.25290131976368867
16 0.28360400525285023
17 0.31500766529656090
18 0.34691141787178950
19 0.37911852603153684
20 0.41143838358058016
21 0.44368833516520590
22 0.47569530766255020
23 0.50729723432398550
24 0.53834425791452890
25 0.56869970396946400
26 0.59824082013593900
27 0.62685928226324210
28 0.65446147234239950
29 0.68096853747777700
30 0.70631624271926860
```

4.

Pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour , l'assemblée doit comporter au minimum 23 personnes.

Exercice 5 : optimisation et rugby (idée GO)

1.

Dans le triangle ETA rectangle en E, en utilisant les relations trigonométriques élémentaires nous avons :

$$\tan\alpha=\frac{EA}{ET}=\frac{25}{x}$$

De même en travaillant dans ETB nous avons :

$$\tan\beta=\frac{EB}{ET}=\frac{30,6}{x}$$

2. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}.$$

Vu la disposition des points sur la figure nous avons la relation : $\gamma=\beta-\alpha$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\tan\gamma&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}\\&=\frac{\frac{30,6}{x}-\frac{25}{x}}{1+\frac{30,6}{x}\times\frac{25}{x}}\\&=\frac{\frac{5,6}{x}}{1+\frac{765}{x^2}}\\&=\frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}}\\&=\frac{5,6}{x}\times\frac{x^2}{x^2+765}\\&=\frac{5,6x}{x^2+765}\end{aligned}$$

3. On *admet que γ est maximum si tan(γ) est maximum.*

Soit f la fonction définie sur]0 ;50] par $f(x) = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$.

$* \; f = \frac{u}{v}$

$* \; u(x) = 5{,}6x \quad u'(x) = 5{,}6 \qquad v(x) = x^2 + 765 \quad v'(x) = 2x$

$* \; f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour tout x de]0 ; 50], $f'(x) = \frac{5{,}6(x^2+765)-5{,}6x(2x)}{x^4} = \frac{5{,}6x^2+4284-11{,}2x^2}{x^4} = \frac{-5{,}6x^2+4284}{x^4}$

Or $x^4 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-5{,}6x^2 + 4284$

$-5{,}6x^2 + 4284 = 0 \; si \; x^2 = 765 \; si \; x = \pm 3\sqrt{85}$ (racines du polynôme du second degré $-5{,}6x^2 + 4284$)

x	0		$3\sqrt{85}$		50
$f'(x)$		+	0	-	(signe de a)
$f(x)$		↗		↘	

f admet un maximum en x=$3\sqrt{85}$.Pour avoir un angle $\widehat{ATB}$ maximum , ET doit être égale approximativement de 28m.

Exercice 6 :étude de la fonction tangente

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

1. $cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ou - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad avec \; k \in \mathbb{Z}$

D=$\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \, ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; \} \, avec \; k \in \mathbb{Z}$

2.Pour tout réel x,

$f(-x) = \tan(-x)$

$= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$ or $sin(-x) = -sin(x) \; et \; cos(-x) = cos(x)$

$= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$= -\tan(x) = -f(x)$

On en déduit que f est une fonction impaire.

3. Pour tout réel x,

$f(x+\pi) = \tan(x+\pi)$

$= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$ or $sin(x+\pi) = -sin(x) et \; cos(x+\pi) = -cos(x)$

$= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}$

$= \tan(x) = f(x)$

On en déduit que f est une fonction π périodique.

3. f étant π périodique, on peut donc étudier f sur un intervalle d'amplitude π c'est-à-dire $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

f étant $impaire$, on peut donc étudier f sur un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Connaissant la courbe de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut déterminer la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ à l'aide de la symétrie de centre O.

Connaissant la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut déterminer la courbe de f sur les autres périodes à l'aide de translations successives de vecteur $\pi\vec{\imath}$.

4. Etudier $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} sin(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} cos(x) = 0^+$ alors comme limite d'un quotient , $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à la courbe de f.

5.Démontrer que , pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

$* \ f = \frac{u}{v}$

$* \ u(x) = \sin(x) \quad u'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = \cos(x) \quad v'(x) = -\sin(x)$

$* \ f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour tout x de $[0\,;\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$

6. Pour tout x de $[0\,;\frac{\pi}{2}[$, $1 > 0$ *et* $cos^2(x) > 0$.

On en déduit que $\frac{1}{cos^2(x)} > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$f(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

7.