Devoir à la maison numéro 7
Pour le 10/03/2025

Exercice 1 :

Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (u_n) telle que pour tout n de N, on a :

$$\frac{3n+2}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{3n^2+5}{3n^2+2}$$

La suite (u_n) converge vers 3 c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

2.Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 ln(x)$.
La courbe de f admet le point d'abscisse $-\frac{3}{2}$ comme point d'inflexion.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to0+} (x^2+3x+1)\ln(x) = -\infty$.

5.Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il franchira dans 90 % des cas le jour suivant
- si l'athlète ne franchit pas la haie en fin d'entraînement, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « l'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »
- p_n la probabilité de l'événement R_n. On considère que $p_0 = 0{,}6$.

Pour tout entier n, $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3$.

6.Une action est cotée 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.
La fonction python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

7.Il faut attendre ,au minimum, 43 mois pour que l'action dépasse 200 €.
(un raisonnement algébrique peut être utilisé)

Exercice 2 :

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.

2. Calculer la probabilité de tirer une épée.

3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.

3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.
Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.
Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Exercice 3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A(−2 ; 0 ; 2), B(−1 ; 3 ; 0), C(1 ; −1 ; 2) et D(0; 0; 3).

- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

Exercice 4 :

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimé en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps exprimé en heure, écoulé depuis la prise du médicament.

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité ?
2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 2]$ notée α.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} prés.
   b. On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} prés est 3,46.
   On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute prés, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimé en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$ et pour tout n de N, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.
   c. Déterminer la valeur de L. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c. Retrouver la valeur de L.
   d. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)e^x}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.