Correction du devoir à la maison numéro 7
Pour le 10/03/2025

<u>Exercice 1 :</u>
Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (u_n) telle que pour tout n de N, on a :

$$\frac{3n+2}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{3n^2+5}{3n^2+2}$$

pour tout n de N*, on a :

$\frac{3n+2}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{3n^2+5}{3n^2+2}$

$\frac{3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)}{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)} \leq u_n \leq \frac{3n^2\left(1+\frac{5}{3n^2}\right)}{3n^2\left(1+\frac{2}{3n^2}\right)}$

$\frac{1+\frac{2}{3n}}{1+\frac{1}{3n}} \leq u_n \leq \frac{1+\frac{5}{3n^2}}{1+\frac{2}{3n^2}}$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{3n}}{1+\frac{1}{3n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{3n^2}}{1+\frac{2}{3n^2}} = 1$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2.Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 ln(x)$.

$*f = uv$

$*u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad u'(x) = x$

$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

$*f' = u'v + uv'$

Pour tout x>0, $f'(x) = xln(x) + \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} = xln(x) + \frac{1}{2}x = x(\ln(x) + \frac{1}{2})$

$*f' = uv$

$*u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$v(x) = \ln(x) + \frac{1}{2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

$*f'' = u'v + uv'$

Pour tout x>0, $f''(x) = ln(x) + \frac{1}{2} + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 + \frac{1}{2} = \ln(x) + \frac{3}{2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		↘		↗	

La fonction f est donc concave sur $]0\,; e^{-\frac{3}{2}}]$et convexe sur $[e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[$.

f'' s'annule et change de signe en $e^{-\frac{3}{2}}$.Par conséquent, la courbe de f admet le point d'abscisse $e^{-\frac{3}{2}}$ comme point d'inflexion.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = +\infty$.

$x \longrightarrow x^2+1$

$X \longrightarrow \frac{ln(X)}{X}$

$+\infty \qquad +\infty \qquad 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0+} (x^2+3x+1)\ln(x) = -\infty$.

Pour tout $x > 0$, $(x^2+3x+1)\ln(x) = x^2\ln(x) + 3xln(x) + \ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} 3x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

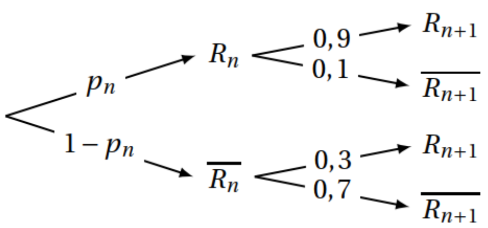
Alors comme limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln(x) + 3xln(x) + \ln(x) = -\infty$

5.Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il franchira dans 90 % des cas le jour suivant
- si l'athlète ne franchit pas la haie en fin d'entraînement, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « l'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »
- p_n la probabilité de l'événement R_n. On considère que $p_0 = 0{,}6$.



D'après la formule des probabilités totales ,

$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_n \times 0{,}9 + (1-p_n) \times 0{,}3 = 0{,}9p_n + 0{,}3 - 0{,}3p_n$

Donc on a bien $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3$: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.

6.Une action est cotée 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

La fonction python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

```
def seuil() :
  m=0
  v=57
  while v > 200 :
    m=m+1
    v = v*1.03
  return m
```

La variable m stocke le temps qui passe en année et v la valeur associée de l'action.

Augmenter de 3% revient à multiplier par 1,03

On répète les taches suivantes : m reçoit m+1 et v reçoit v*1.03 jusqu'à ce que v dépasse 200 c'est-à-dire **tant que v≤200**

Tableau d'état des variables :

m	0	1				
v	57	57*1,03=58,71			≤200	>200

Pour que le programme soit juste, il faut remplacer v>200 par **v<=200**

7.u_n est la valeur de l'action au bout de n mois.

Il est clair que $u_{n+1} = 1{,}03u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de 1er terme $u_0 = 57$ et de raison q=1,03.

On en déduit que pour tout n , $u_n = 57 \times 1{,}03^n$. On résout l'inéquation :

$57 \times 1{,}03^n \geq 200$

$1{,}03^n \geq \frac{200}{57}$

$\ln\left(1{,}03^n\right) \geq \ln\left(\frac{200}{57}\right)$

$n \ln(1{,}03) \geq \ln\left(\frac{200}{57}\right)$

$n \geq \frac{\ln\left(\frac{200}{57}\right)}{\ln(1{,}03)}$ $\quad \mathbf{(\ln(1,03) > 0 \; \boldsymbol{car} \; 1,03 > 1)}$

Or, $\frac{\ln\left(\frac{200}{57}\right)}{\ln(1{,}03)} \approx 42{,}47$

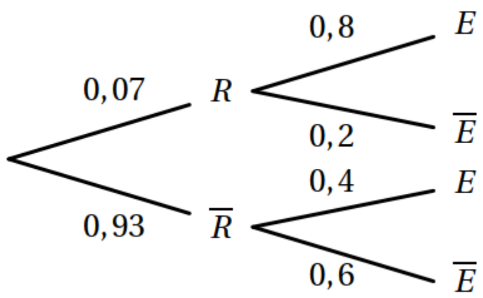
Il faut attendre ,au minimum, 43 mois pour que l'action dépasse 200 €.

<u>Exercice 2 :</u>

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a : $p(R) = 0{,}07$; $p_R(E) = 0{,}8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0{,}4$

On en déduit l'arbre pondéré modélisant la situation :



et on a : $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2. R et $\overline{R}$ constituent une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales : $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$

donc $p(E) = p(R) \times p_R(E) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(E)$

donc $p(E) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}428$.

3. On cherche la probabilité que le joueur obtienne un objet rare sachant qu'il a tiré une épée.

$p_E(R) = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} \approx 0{,}131$ au millième près.

Partie B

1. Les 30 défis constituent une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes à deux issues, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(30\,;0,07)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$

   Son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. $p(X < 6) = p(X \leqslant 5) \approx 0,984$ au millième près.

3. On cherche le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$

   $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5 \iff 1 - p(X < k) \geqslant 0,5 \iff -p(X < k) \geqslant -0,5 \iff$

   $p(X < k) \leqslant 0,5 \iff p(X \leqslant k-1) \leqslant 0,5.$

   En utilisant la calculatrice on trouve : $p(X \leqslant 1) \approx 0,3694$ et $p(X \leqslant 2) \approx 0,6487$

   La plus grande valeur de k telle que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc $k = 2$.

   Après avoir remporté 30 défis, dans au moins 50 % des cas, le joueur aura tiré au moins 2 objets rares.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$

   $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff -p(X = 0) \geqslant -0,05 \iff$

   $p(X = 0) \leqslant 0,05$; or $p(X = 0) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$

   $0,93^n \leqslant 0,05 \iff \ln(0,93^n) \leqslant \ln(0,05)$ car ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

   $\iff n\ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$ $\boxed{\ln(0,93) < 0 \ car\ 0,93 < 1}$

   $\iff n \geqslant 41,3 \iff n \geqslant 42$

   Il faut donc tirer au minimum 42 objets pour que la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare soit supérieure ou égale à 0,95.

<u>Exercice 3 :</u>

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (le système $\begin{cases} 3 = k \\ -1 = -3k \\ 0 = -2K \end{cases}$ n'admettant pas de solutions)

   On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times -2 = 1 + 9 - 10 = 0$

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1 \times 3 + 3 \times -1 + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$

   Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).

   Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

   $x + 3y + 5z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

   De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :

   $-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0 \iff -2 + 10 + d = 0 \iff d = -8$

   Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c. $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3\times 0 + 5\times 3 - 8 = 15 - 8 = 7 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Une équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

D'une part : pour $t = 0$, on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3\times 0 = 0 \\ z = 3+5\times 0 = 3 \end{cases}$.

On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.

D'autre part : un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal au plan(ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonal au plan (ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ résolvons le système (S) : $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3\times(1+3s) = -1-5s \\ 3+5\times(1+3s) = 2-6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s = 1+3\times\frac{-2}{7} = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

Remplaçons t par $\frac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3\times\frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ z = 3+5\times\frac{1}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\frac{1}{7}\,;\,\frac{3}{7}\,;\,\frac{26}{7}\right)$.

4. **a.** Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite $\mathscr{D}_1$.

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

$t + 3\times(3t) + 5\times(3+5t) - 8 = 0 \iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \iff 35t = -7 \iff t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5}$

Remplaçons t par $-\frac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 3\times\frac{-1}{5} = -\frac{3}{5} \\ z = 3+5\times\frac{-1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $H\left(-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{3}{5}\,;\,2\right)$.

b. La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$\text{DH}^2 = \left(-\frac{1}{5}-0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}-0\right)^2 + (2-3)^2 = \frac{1}{25}+\frac{9}{25}+1 = \frac{35}{25}$

$\text{DH} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{14}{10}} = \sqrt{1,4}$ ou $\frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1,183$ soit 1,18 au centième près.

<u>Exercice 4 :</u>

Partie A : étude du premier protocole

1. a.

$*\ f = uv$

$*\ u(t) = 3t \qquad v(t) = e^{-0,5t+1}$.

$u'(t) = 3 \qquad v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$

- $f' = u'v + uv'$

$\forall t \in [0;10], f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$

b. $\forall t \in [0;10], 3e^{-0,5t+1} > 0$

donc, le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,5t+1$.

On résout l'inéquation $-0,5t+1 > 0$

$-0,5t > -1$

$t < \frac{-1}{-0,5}$

$t < 2$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	6	$\searrow$	
	0				$30e^{-4}$

$f(0) = 3 \times 0e^{-0,5\times0+1} = 0$

$f(2) = 3 \times 2e^{-0,5\times2+1} = 6e^0 = 6$

$f(10) = 3 \times 10e^{-0,5\times10+1} = 30e^{-4}$

f est croissante sur [0 ;2] et décroissante sur [2 ;10]

c. D'après le tableau de variation précédent, le maximum de la fonction f sur $[0;10]$ est $f(2) = 6$, donc, la quantité de médicament dans le sang sera maximale au bout de 2 heures, elle sera de 6 mg.

2. a.

* f est continue et strictement croissante sur $[0;2]$.

*De plus, $5 \in [f(0); f(2)]$

*Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 5$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0;2]$

Avec la calculatrice par balayage, on obtient : $1,022 < \alpha < 1,023$, donc, $\alpha \approx 1,02$.

b. D'après le tableau de variation, $f(t) \geq 5$ si et seulement si $t \in [\alpha;\beta]$

or, $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,02 \approx 2,44$

donc, le médicament sera efficace pendant environ 2,44 heures soit 2 h et 26 min à une minute prés.

Partie B : étude du deuxième protocole

1. $u_1 = u_{0+1} = 0,7u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$

Au bout d'une heure, la quantité de médicaments dans le sang est de 3,2 mg.

2. a. Soit $P(n)$ la proposition « $u_n \leq u_{n+1} < 6$ ».

- **<u>1ère étape :initialisation</u>**

  vérifions que P(0) est vraie. D'une part, $u_0 = 2$
  D'autre part, $u_1 = 3{,}2$
  Donc, $u_0 \leq u_1 < 6$
  P(0) est donc vraie.

- **<u>2ème étape : hérédité</u>**

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \leq u_{k+1} < 6$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_{k+2} < 6$.

$u_k \leq u_{k+1} < 6$
$0{,}7u_k \leq 0{,}7u_{k+1} < 4{,}2$
$0{,}7u_k + 1{,}8 \leq 0{,}7u_{k+1} + 1{,}8 < 6$
$u_{k+1} \leq u_{k+2} < 6$.
P(k+1) est vraie

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

b. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 6, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est donc convergente.

c. $\forall n \in \mathrm{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0{,}7x + 1{,}8$
La suite (u_n) converge et la fonctio**n f est continue sur** $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Si L est la limite de la suite (u_n) alors d'après le théorème du point fixe : L est solution de l'équation $f(L) = L$.
On a alors :
$0{,}7L + 1{,}8 = L$
$-0{,}3L = -1{,}8$
$L = \frac{-1{,}8}{-0{,}3}$
$L = 6$
Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$
Au bout d'un grand nombre d'heures, la quantité de médicament contenue dans le sang va se rapprocher de 6 mg.

3. a. $\forall n \in \mathrm{N}, v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8) = 4{,}2 - 0{,}7u_n = 0{,}7(6 - u_n) = 0{,}7v_n$
donc, v est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$

b. $\forall n \in \mathrm{N}, v_n = v_0 q^n = 4 \times 0{,}7^n$
$u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$

c. On résout l'inéquation : $u_n \geq 5{,}5$
$6 - 4 \times 0{,}7^n \geq 5{,}5$
$-4 \times 0{,}7^n \geq -0{,}5$
$0{,}7^n \leq 0{,}125$
$n \ln(0{,}7) \leq \ln(0{,}125)$
$n \geq \frac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)}$ $(\ln(0{,}7) < 0 \; car \; 0{,}7 < 1)$
Or, $\frac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)} \approx 5{,}83$
$n \geq 6$
Finalement, il faudra faire 6 injections avec ce protocole.

Exercice 5 :

1. **a.** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e > 0$.

   Par limite de la somme, on a : $\lim_{x\to 1} x-1 = 0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x-1<0$. (on peut noter $\lim_{x\to 1} x-1 = 0^-$).

   Par limite du quotient, on a : $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

   b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2. On a : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$;

   Par limite de la somme, on a : $\lim_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$,

   Par limite du quotient, on en déduit : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que C admet une asymptote horizontale d'équation y=0 en -∞.

3. **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominatuer ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x) = \frac{e^x\times(x-1)-e^x\times 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x\times(x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

   b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

   $x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

   Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$		1
signe de $f'(x)$		$-$	‖
variations de f	0	↘	$-\infty$ ‖

4. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

   Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$ et $e^x>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.

   Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2-4\times1\times5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Rem. On peut écrire :
$x^2-4x+5=(x-2)^2-4+5=(x-2)^2+1 \geqslant 1>0$: le trinôme est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\,;\,1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0)=\dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2$;
- $f(0)=\dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

La formule classique donne une équation pour T :
$y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff y=-2x-1$
L'équation réduite de T est donc : $y=-2x-1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.
Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).
On en déduit donc :

$$\begin{aligned} x\in]-\infty\,;\,1[&\implies f(x)\leqslant -2x-1\\ &\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}\leqslant -2x-1\\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (x-1)(-2x-1)\\ &\qquad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[,\quad x-1<0\\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5.a)

- f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.
- $-2 \in]\lim\limits_{x\to 1^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$ cad $-2 \in]-\infty;0[$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur $]-\infty;1[$.

b) A l'aide de la technique de balayage , on obtient : $0<\alpha<1$ puis $0{,}3<\alpha<0{,}4$ puis $0{,}31<\alpha<0{,}32$.