Exercice 1:

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1.Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}5$ et $u_0 = 2$.

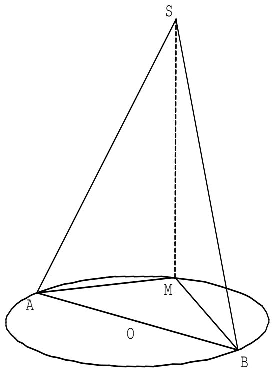
Affirmation 1 : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$

2.On suppose que g est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ et $g(1) = 2$ et $g'(1) = 3$.

Affirmation 2 : Pour tout réel x , $g(x) \geq 3x - 1$.

3.On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - cos(x) - 3sin(x)$

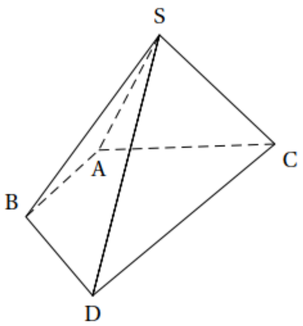
Affirmation 3 : les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :
$x \to Ce^{2x} + cos(x) + sin(x)$ où C décrit $\mathbb{R}$.



4.Soit (C) un cercle de diamètre [AB] dans un plan (P).
Affirmation 4 : M est un point quelconque de (C) distinct de A et B.
Soit (D) la droite orthogonale à (P) passant par M et soit S un point de (D).
La droite (AM) est orthogonale à (BS).

Exercice 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1); B(4 ; −1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

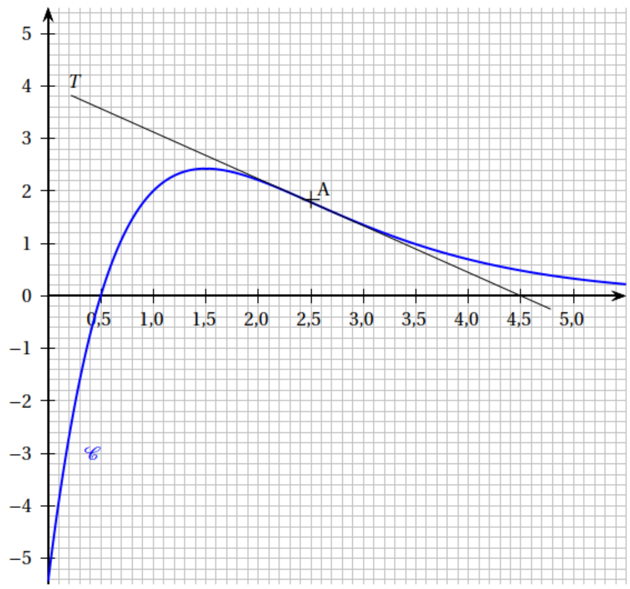
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

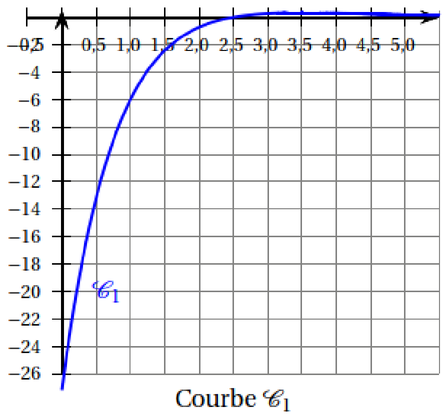
Exercice 3 :

Partie A

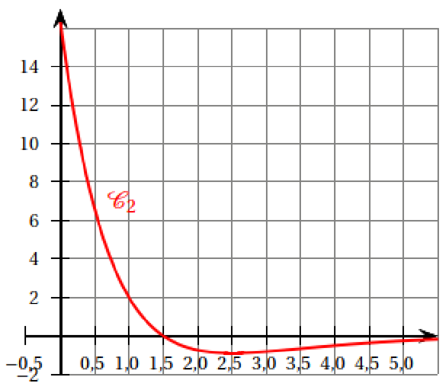
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.

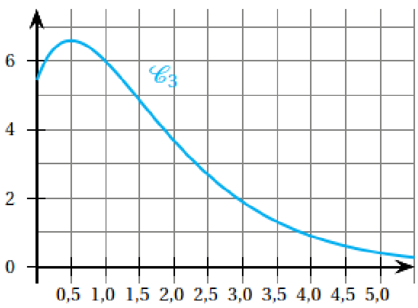


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;\,+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

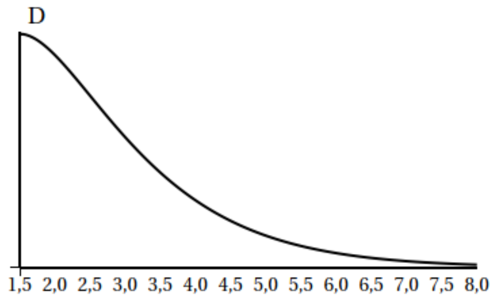
En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.

Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,8\right]$.

L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.