Correction du devoir à la maison numéro 8

Exercice 1:

1.Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}5$ et $u_0 = 2$.

Affirmation 1 : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ VRAI
On réalise un raisonnement par récurrence.

Soit $P(n)$ la proposition « $u_n \leq u_{n+1} < 5$». (n entier naturel)

- **1ère étape :initialisation**

  vérifiens que P(0) est vraie. D'une part,$u_0 = 2$
  D'autre part, $u_1 = 0{,}7u_0 + 1{,}5 = 2{,}9$. Donc, $u_1 \leq u_2 < 5$
  P(0) est donc vraie.

- **2ème étape : hérédité**

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \leq u_{k+1} < 5$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_{k+2} < 5$.
$u_k \leq u_{k+1} < 5$
$0{,}7u_k \leq 0{,}7u_{k+1} < 0{,}7 \times 5$
$0{,}7u_k + 1{,}5 \leq 0{,}7u_{k+1} + 1{,}5 < 3{,}5 + 1{,}5$
$u_{k+1} \leq u_{k+2} < 5$
P(k+1) est vraie
Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

2.On suppose que g est une fonction concave $sur\ \mathbb{R}\ et\ g(1) = 2\ et\ g'(1) = 3$.

Affirmation 2 : Pour tout réel x , $g(x) \geq 3x - 1$. FAUX

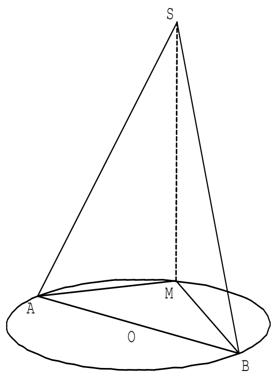
Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a est $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.
On remplace a par 1. Une équation est $y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$.
g est une fonction concave $sur\ \mathbb{R}$. On en déduit que la courbe de g est située en dessous de chacune de ses tangentes en particulier la tangente au point d'abscisse 1.
Ainsi , pour tout réel x , $g(x) \leq 3x - 1$.

3.On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - cos(x) - 3sin(x)$

Affirmation 3 : les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :
$x \to Ce^{2x} + cos(x) + sin(x)$ où C décrit $\mathbb{R}$. VRAI
Pour tout reel x, $p(x) = \cos(x) + \sin(x)$
Pour tout reel x, $p'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$
Donc : $2p(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + 2\sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - \sin(x) = p'(x)$
On a donc : $p'(x) = 2p(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$
La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \cos(x) + \sin(x)$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 2y - cos(x) - 3sin(x)$
Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - cos(x) - 3sin(x)$ sont les fonctions de la forme :$x \to Ce^{2x} + cos(x) + sin(x)$ où C décrit $\mathbb{R}$.

4.Soit (C) un cercle de diamètre [AB] dans un plan (P).
Affirmation 4 : M est un point quelconque de (C) distinct de A et B.
Soit (D) la droite orthogonale à (P) passant par M et soit S un point de (D).
La droite (AM) est orthogonale à (BS). VRAI



Comme (SM) est orthogonale au plan (P) alors (SM) est orthogonale à toutes les droites de ce plan en particulier (AM)

De plus, M appartient au cercle de diamètre [AB] . On en déduit que (AM) et (MB) sont perpendiculaires.

Ainsi (AM) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BMS) : (MB) et (SM).

On en déduit donc que (AM) est orthogonale au plan (BMS) .

Par conséquent , (AM) est orthogonale à toutes les droites de (BMS) en particulier la droite (BS)

Exercice 2 :

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (le système $\begin{cases}-3=k\\0=4k\\1=-k\end{cases}$ n'admettant pas de solutions)

On en déduit que les points A,B et C définissent un plan

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

Supposons que $a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}+c\,\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

On en déduit que $\begin{cases}a-3b+c=0\\4b+4c=0\\-a+b-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+3c+c=0\\b=-c\\-a-c-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4c\\b=-c\\a=-4c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4c\\b=-c\end{cases}$

On peut prendre $c=1$.

On a : $-4\,\overrightarrow{AB}-1\,\overrightarrow{AC}+1\,\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

On en déduit qu'il existe un triplet (a,b,c) non tous nuls tels que $a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}+c\,\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et donc les points A,B,C et D le sont aussi.

b)

On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD}=4\times\overrightarrow{AB}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. **a.** Comme on est dans un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = 2+0-2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = -6+4+2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont aussi orthogonaux;

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation de la forme : $2x+y+2z+d=0$, où d est un réel donné.

De plus, $A \in (ABC) \iff 2x_A + y_A + 2z_A + d = 0$

$\iff 2\times 3 + (-1) + 2\times 1 + d = 0$

$\iff 6-1+2+d=0$

$\iff d=-7$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x+y+2z-7=0$.

c. Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ.
Et si la droite passe par S, de coordonnées (2 ; 1 ; 4), on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d.On résout le système :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \\ 2x+y+2z-7=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \\ 2(3+2t)+1+t+2(4+2t)-7=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \\ 6+4t+1+t+8+4t-7=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \\ 9t=-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2+2t = \frac{2}{3} \\ y = 1+t = \frac{1}{3} \\ z = 4+2t = \frac{8}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$ I a pour coordonnées $I(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3})$

$$\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-2\\ \frac{1}{3}-1\\ \frac{8}{3}-4\end{pmatrix} \quad soit \quad \overrightarrow{SI}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$SI = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

On arrive bien à SI = 2 unités graphique, et comme $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien SI = 2 cm.

4. **a.** Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BH} = 4\times(-1)+0\times4+(-4)\times-1 = -4+0+4 = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

On a $BH = \sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

b. On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

- $AB = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ cm ;
- Comme on a $\overrightarrow{CD} = 4\times\overrightarrow{AB}$, on a notamment, $CD = |4|\times AB = 4\sqrt{2}$ cm.

L'aire du trapèze ABDC est donc : $\mathcal{A}_{ABDC} = \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{2} = 15\,\text{cm}^2$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathcal{V}_{ABDCS} = \frac{1}{3}\times15\times2 = 10\,\text{cm}^3$.

Exercice 3 :

Partie A

1. Par lecture graphique :

x	0	1,5	5
variations de f	$-5,5$ ↗	$2,4$	↘ $0,35$

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1,5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1,5\,;\,5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée f' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

La fonction f est concave sur $[0\,;\,2,5[$ puis convexe sur $]2,5\,;\,5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde f'' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si F est une primitive de f, on aura donc $f = F'$ et $f' = F''$.

f est négative sur $[0\,;\,0,5[$ puis positive, une primitive est donc décroissante sur $[0\,;\,0,5[$ puis croissante : ce n'est pas le cas (c'est même exactement le contraire) de la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

$\mathscr{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique d'une primitive de la fonction f.

Partie B

1. **a.** f est de la forme $u\times v$ avec $u(x) = 4x-2$ et $v(x) = e^{-x+1}$.

On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1\times e^{-x+1}$.

$f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel x positif :

$f'(x) = 4\times e^{-x+1} - 1\times e^{-x+1}\times(4x-2) = (4-4x+2)e^{-x+1} = (-4x+6)e^{-x+1}$.

b. Déterminons le signe de $-4x+6$: $-4x+6>0 \iff 6>4x$

$$\iff \frac{3}{2}>x$$

les images pertinentes sont : $f(0) = (4\times0-2)e^{-0+1} = -2e$

et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4\times\frac{3}{2}-2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-\frac{1}{2}}$ (la limite en $+\infty$ est admise).

Remarque : On a $-2e \approx -5,43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A** et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,43$, là aussi, conforme.

On a donc le tableau :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-4x+6$		$+$	0	$-$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

c. Pour tout réel x positif on a :

$f''(x) = -4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (-4x+6) = (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$: $4x-10 > 0 \iff 4x > 10$

$$\iff x > \frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $4x-10$		$-$	0	$+$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. **a.** Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ avec a et b deux nombres réels.

F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel x positif on a :

$F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} - \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (ax+b) = (a-ax-b)\mathrm{e}^{-x+1} = (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1}$

F est une primitive de $f \iff F' = f$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a) = (4x-2) \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x+1} > 0$$

$$\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients}$$

$$\iff \begin{cases} a = -4 \\ b = a+2 = -4+2 = -2 \end{cases}$$

$F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = (-4\times 8-2)\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

$I \approx 4,821$ soit $4,82$ à 10^{-2} près.

3. **a.** La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2,426$

soit $2,43$ m au centimètre près.

b. L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale I calculée à la question **3** car f est continue et positive sur $[\frac{3}{2}\,;\,8]$

L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à $1\,\mathrm{m}^2$.

On veut donc couvrir une surface de : $\frac{75}{100} \times 4,82\,\mathrm{m}^2$ soit environ $3,62\,\mathrm{m}^2$.

De plus : $\frac{3,62}{0,8} \approx 4,525$

Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

Exercice 4 : uniquement pour les futurs prépas

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1.Soit (P) le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.

On cherche une représentation paramétrique de la droite (d) perpendiculaire au plan P passant par A.
Le vecteur normal au plan (P) $\vec{n}(a; b; c)$ est aussi un vecteur directeur de (d).
Une représentation paramétrique de (d) est donc :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

On cherche à présent l'intersection de (d) avec la plan (P) en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ a(x_A + ta) + b(y_A + tb) + c(z_A + tc) + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ ax_A + ta^2 + by_A + tb^2 + cz_A + tc^2 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ (a^2 + b^2 + c^2)t = -ax_A - by_A - cz_A - d \end{cases} \quad \text{or } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ t = \frac{-ax_A - by_A - cz_A - d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d(A, P) = AH &= \sqrt{(x_A + ta - x_A)^2 + (y_A + tb - y_A)^2 + (z_A + tc - z_A)^2} \\ &= \sqrt{t^2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{t^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{or } \sqrt{t^2} = |t| \\ &= \frac{|-ax_A - by_A - cz_A - d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

2. Soient (P) et (P') les plans d'équation $3x - 4y + 1 = 0$ et $2y - 6z + 2 = 0$.
Soit $M(x\,; y\,; z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} d(M, P) = 2d(M, P') &\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = 2\frac{|2y - 6z + 2|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-6)^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{25}} = 2\frac{|2y - 6z + 2|}{\sqrt{40}} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|2y - 6z + 2|}{\sqrt{10}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{10}\,|3x - 4y + 1| = 5|2y - 6z + 2| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{10}\,(3x - 4y + 1) = 5(2y - 6z + 2)$ ou $\sqrt{10}\,(3x - 4y + 1) = -5(2y - 6z + 2)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{10}x - (4\sqrt{10} + 10)y + 30z + \sqrt{10} - 10 = 0$ ou $3\sqrt{10}x - (4\sqrt{10} - 10)y + 30z + \sqrt{10} + 10 = 0$

L'ensemble cherché est la réunion des plans d'équations : $3\sqrt{10}x - (4\sqrt{10} + 10)y + 30z + \sqrt{10} - 10 = 0$ ou $3\sqrt{10}x - (4\sqrt{10} - 10)y + 30z + \sqrt{10} + 10 = 0$

3. **géométrie plane ! exercice de Khôlle**

d : $ax + by + c = 0$ et d' :$ax + by = \sqrt{3}(bx - ay)$ et d'': $ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay)$ (avec $(a\,; b) \neq (0\,; 0)$)

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b; a)$

$ax + by = \sqrt{3}(bx - ay) \Leftrightarrow \left(a - \sqrt{3}b\right)x + \left(b + a\sqrt{3}\right)y = 0$
Un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}(-b - a\sqrt{3}; a - \sqrt{3}b)$

$ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay) \Leftrightarrow \left(a + \sqrt{3}b\right)x + \left(b - a\sqrt{3}\right)y = 0$
Un vecteur directeur de (d'') est $\vec{w}(-b + a\sqrt{3}; a + \sqrt{3}b)$

Démontrons que d et d' forment un angle droit.
Pour cela, calculons $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{-b\left(-b-a\sqrt{3}\right)+a\left(a-\sqrt{3}b\right)}{\sqrt{b^2+a^2}\sqrt{\left(-b-a\sqrt{3}\right)^2+\left(a-\sqrt{3}b\right)^2}}$

$$= \frac{b^2 + a^2 + ba\sqrt{3} - ab\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 + a^2}\sqrt{b^2 + 2ab\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 - 2ab\sqrt{3} + 3b^2}}$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\sqrt{4b^2 + 4a^2}}$$
$$= \frac{b^2 + a^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que les droites (d) et (d') forme un angle de 60°.

Faisons de même avec les droites (d) et (d'').

$\frac{\vec{u}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} = \frac{-b\left(-b+a\sqrt{3}\right)+a\left(a+\sqrt{3}b\right)}{\sqrt{b^2+a^2}\sqrt{\left(-b+a\sqrt{3}\right)^2+\left(a+\sqrt{3}b\right)^2}}$

$$= \frac{b^2 + a^2 - ba\sqrt{3} + ab\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 + a^2}\sqrt{b^2 - 2ab\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2}}$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\sqrt{4b^2 + 4a^2}}$$
$$= \frac{b^2 + a^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que les droites (d) et (d'') forme un angle de 60°.
Ainsi les 3 droites forment un triangle équilatéral.