Devoir à la maison numéro 9 Pour le 12/04/2025

Exercice 1:

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U = U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   — Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours;
   — Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

Exercice 2 :

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

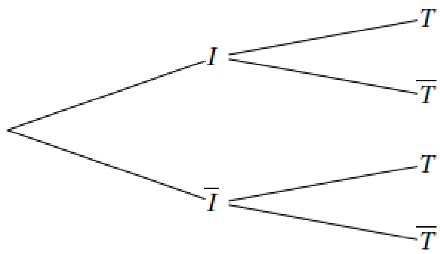
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

— Sa sensibilité est de 0,8.

— Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0{,}05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Exercice 3 :

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

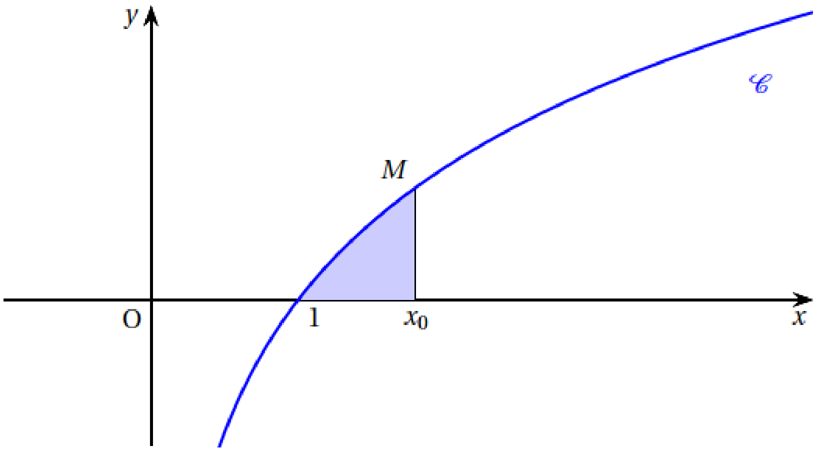
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

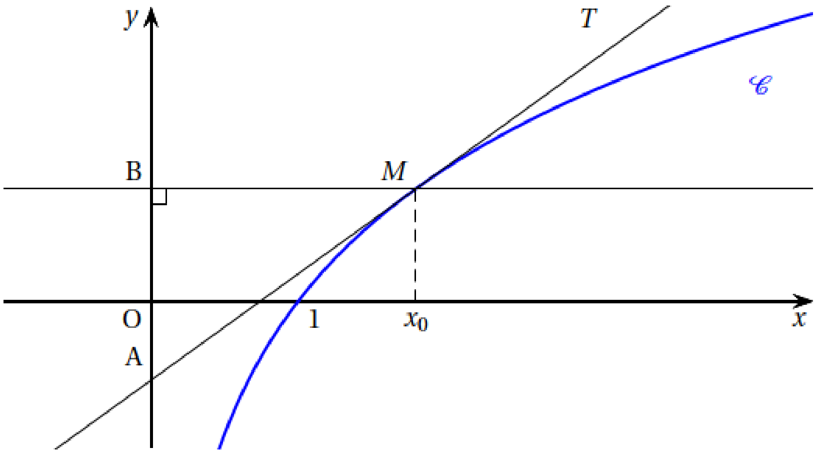
1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Exercice 4 : étude d'une fonction trigonométrique facultatif

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}cos(2x) - \sqrt{3}\,cos(x)$

1. Montrer que pour tout réel x , $f(x+2\pi)=f(x)$ puis $f(-x)=f(x)$. En utilisant le vocabulaire adapté, que peut-on dire de la fonction f ?
2. Proposer le plus petit intervalle I sur lequel on peut étudier les variations de f. (ne pas justifier)
3. On admet que f est dérivable sur I. Donner sans justifier $f'(x)$.
4. Montrer que $f'(x) = sin(x)(2\,cos(x) + \sqrt{3})$.
5. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur I.