Correction du devoir à la maison numéro 9

Exercice 1:

1. **Affirmation 1 : FAUSSE.**

   La propriété du cours indique que toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.

   Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.

   La suite constante égale à 1 est décroissante (mais pas strictement décroissante) et minorée par 0 (entre autres), et pourtant, elle converge vers 1, et pas vers 0.

   Si on préfère donner un contre exemple avec une suite strictement décroissante, on peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, par exemple. Cette suite est assez clairement décroissante, minorée par 0 et converge vers 1.

2. **Affirmation 2 : VRAIE.**

   En effet, pour n entier naturel : $v_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

   Comme on a : $\dfrac{9}{7} > 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$.

   Par ailleurs : $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$.

   Finalement, par limite du produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty$.

   Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

   L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

   Puis, la boucle `for` va s'exécuter `N` fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et `N-1`, donc ici 0, 1, 2 et 3.

   - La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1 ;
   - La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à $1+1=2$;
   - La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à $2+2=4$;
   - La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à $4+3=7$.

   On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

On peut également faire le tableau d'état des variables :

N	U	i
4	1	
4	1+0=1	0
4	1+1=2	1
4	2+2=4	2
4	4+3=7	3

4. **Affirmation 4 : FAUSSE.**

Pour connaître le montant total du prix A, il suffit de multipler 1000 par 15. Le montant total est donc de 15 000 €.

Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premier termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jours) et de raison 2 (car le montant chaque jour est le double du montant de la veille).

On applique la formule connue : $1 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = \dfrac{1-2^{15}}{-1} = 2^{15} - 1 = 32\,767.$

Comme $32\,767 > 15\,000$, le prix B est (nettement) plus avantageux.

Remarque : En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi (patiemment) calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue au quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16\,384$,

Exercice 2 :

Partie A

1. Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.

   Comme 5,7 % des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0,057$.

2.a)On répète 100 fois une expérience de manière identique et indépendante (succès =la personne est infectée , probabilité du succès : p=0,057).On obtient ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres n=100 et p=0,057. Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}057$.

b. Puisque X suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0,057 = 5,7$. On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.

c. La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.

Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour k entier naturel inférieur à n) : $P(X = k) = \dbinom{N}{k} \times p^k \times (1-p)^{N-k}$.

On a donc, ici : $P(X = 0) = \dbinom{100}{0} \times 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028.$

d. La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :

$P(X \geqslant 2) = 1 - P\left(\overline{X \geqslant 2}\right) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).

À la calculatrice, on obtient : $P(X \geqslant 2) \approx 0,9801$.

e. Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leqslant 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leqslant 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,9408$.

L'entier cherché est 9.

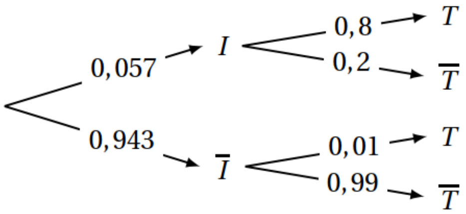
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

Partie B

1. L'évènement I est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.

- La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
- celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right) = 0,99$.

Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :

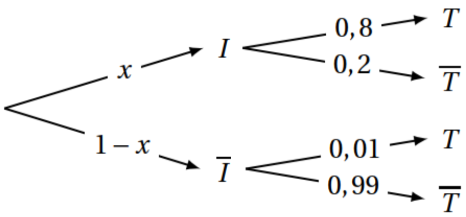


2. Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,05503$.

3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.
D'après la définition des probabilités conditionnelles :
$P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{0,057 \times 0,8}{0,05503} = \dfrac{4560}{5503} \approx 0,8286$.
Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,8286 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

Partie C

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x.
On a donc l'arbre suivant :



Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01$.
D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.
On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$
Résolvons : $0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844$

$$\iff x = \frac{0,2844}{0,79}$$

$$\iff x = \frac{2844}{7900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\dfrac{2844}{7900} = 0,36$.
Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.

Exercice 3 :

1. On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1$.

2.
$*\ F = a(uv - w)$
$*\ u(x) = x \quad u'(x) = 1 \qquad v(x) = ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x} \qquad w(x) = x \quad w'(x) = 1$

$*\ F' = a(u'v + uv' - w')$

Pour tout $x > 0$, $F'(x) = a\left(1\ln(x) + x\frac{1}{x} - 1\right) = a(\ln(x) + 1 - 1) = aln(x) = f(x)$
On en déduit que F est une primitive de f.

3.Sur $[1\,;+\infty[$, $x \geq 1$. On en déduit que $\ln(x) \geq 0$ et donc $a\ln(x) \geq 0 \quad (a > 0)$

f est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$. On en déduit que l'aire du domaine compris entre la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1\ et\ x = x_0$ est égale à

$$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$,

Une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
On remplace a par x_0. Une équation de T est :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + aln(x_0) = \frac{a}{x_0}x - a + aln(x_0)$.

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonné de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.

On a $\mathrm{AB} = |y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).