**Devoir surveillé numéro 1 (jeudi 03/10/2024)**

**Consignes : L’usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront**

**pour une part importante dans l’appréciation des copies.**

**Exercice 1 : QCM (2,5 points)**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre*

*réponses sont proposées : une seule de ces réponses convient.*

*Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix*

*effectué. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou*

*l’absence de réponse ne rapporte ni n’enlève aucun point.*

1.La suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=\left(-1\right)^{n}$.

a)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est majorée et non minorée b) La suite $\left(u\_{n}\right)$ est minorée et non majorée

c)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est bornée d) La suite $\left(u\_{n}\right)$ n’est ni minorée ni majorée

2.La suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=n\left(-1\right)^{n}$.

a)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est majorée et non minorée b) La suite $\left(u\_{n}\right)$ est minorée et non majorée

c)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est bornée d) La suite $\left(u\_{n}\right)$ n’est ni minorée ni majorée

3.La suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=2^{n}$.

a)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est majorée et non minorée b) La suite $\left(u\_{n}\right)$ est minorée et non majorée

c)La suite $\left(u\_{n}\right)$ est bornée d) La suite $\left(u\_{n}\right)$ n’est ni minorée ni majorée

4.Soit la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=3×5^{n}$ . On pose $S=u\_{0}+u\_{1}+ …+u\_{10}$ .

a) S=$\frac{3-3×5^{10}}{1-5}$ b) S=$\frac{3-3×5^{11}}{1-5}$

c) S=$\frac{3-3×5^{10}}{1-3}$ d) S=$\frac{3-3×5^{11}}{1-3}$

5.Soit l’équation différentielle $2y’-4y=5 et y(0)=2$ .

La solution de cette équation différentielle est la fonction $f$ définie sur ℝ par :

**a)** $f\left(x\right)=2e^{2x}-\frac{5}{4}$  **b)**$f\left(x\right)=\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{5}{4}$

**c)**$f\left(x\right)=\frac{13}{4}e^{2x}-\frac{5}{4}$ **d)**$f\left(x\right)=\frac{5}{2}x+2$

**Exercice 2 :étude d’une suite arithmético - géométrique (6 points)**

Une société propose des contrats annuels d’entretien de photocopieurs. Le directeur remarque que, chaque année, 14% de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 contrats sont résiliés.

En 2020, l’entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite $\left(u\_{n}\right)$ où $u\_{n}$ est le nombre de contrats souscrits l’année *2020+n.*

Ainsi, on a $u\_{0}=120$.

1. Déterminer le nombre de contrats d’entretien en 2021.

On admet que, pour tout entier naturel *n*, $u\_{n+1}=1,14u\_{n}-7$

2.Le programme Python ci-dessous permet d’afficher dans une liste les $n$ premiers termes de la suite $\left(u\_{n}\right)$.( c’est-à-dire de $u\_{0} $à $u\_{n-1}).$Compléter ce programme.

def liste($n$) :

 $u$=120

 L=[u]

 for ……………………….………..($1$,…….) :

 u=……….

 L=………

 return(L)

3. On rappelle que pour tout entier naturel *n* , $u\_{n+1}=1,14u\_{n}-7$ et $u\_{0}=120$.

On définit la suite $\left(v\_{n}\right)$ par : pour tout entier naturel $n$, $v\_{n}=u\_{n}-50$.

1. Démontrer que la suite $\left(v\_{n}\right)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer $v\_{n}$ en fonction de $n$ puis démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$u\_{n}=70×1,14^{n}+50$$

1. Retrouver ce résultat à l’aide d’un raisonnement par récurrence.

4. a)Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u\_{n+1}-u\_{n}=9,8×1,14^{n}$

b) En déduire que la suite $\left(u\_{n}\right)$ est croisssante.

5. Compte tenu de ses capacités structurelles, l’entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l’entreprise devra embaucher davantage de personnel. En quelle année, l’entreprise devra

t’elle embaucher davantage de personnel ? *Toute prise d’initiative est valorisée.*

**Exercice 3 : raisonnement par récurrence (3 points)**

On définit la suite $\left(u\_{n}\right)$ par : pour tout entier naturel *n* , $u\_{n+1}=0,8u\_{n}+2$ et $u\_{0}=20$.

1.Démontrer à l’aide d’un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel *n,*  $u\_{n}\geq 10.$

2.Démontrer , à l’aide du raisonnement de votre choix, que la suite $\left(u\_{n}\right)$ est décroisssante.

**Formulaires de dérivées** *u* et *v* sont **dérivables** sur I

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction *f* | Dérivée *f* ' | condition |
| $$u + v$$ | $$u^{'}+v'$$ |  |
| $$ku$$ | $$ku'$$ |  |
| $uv$  | $$u^{'}v+uv'$$ |  |
| $$u²$$ | $$2u'u$$ |  |
| $$\frac{1}{v}$$ | $$-\frac{v^{'}}{v^{2}}$$ | pour tout *x* I, $v(x)\ne 0$ |
| $$\frac{u}{v}$$ | $$\frac{u^{'}v-uv^{'}}{v^{2}}$$ | pour tout *x* I, $v(x)\ne 0$ |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction *f* | Dérivée *f* ' | condition |
| $$g(ax+b)$$ | $$ag'(ax+b)$$ |  |
| $$v∘u$$ou $v\left(u\left(x\right)\right)$ | $$v'∘u×u'$$ou $v'\left(u\left(x\right)\right)×u'\left(x\right)$ |  |
| $u^{n}$ avec $n\in Z^{\*}$ | $$nu^{'}u^{n-1}$$ |  Si $n\leq -1$, u$(x)\ne 0$ |
| $\sqrt{u}$  | $$\frac{u^{'}}{2\sqrt{u}}$$ | Pour tout $x, u(x)>0$ |
| $$e^{u}$$ | $$u'e^{u}$$ |  |
| $$cos⁡(u)$$ | $$-u'sin⁡(u)$$ |  |
| $$sin(u)$$ | $$u’cos(u)$$ |  |

**Exercice 4 : calcul de dérivées (4,5 points)**

**Dans cet exercice, la dérivabilité des fonctions sera admise.**

**Les questions 1 , 2 et 3 sont indépendantes**

1.Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f\left(x\right)=\sqrt{e^{x}+1}$.

Pour tout réel $x$ , déterminer (en justifiant) l’expression de $f'\left(x\right)$.

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f\left(x\right)=e^{x^{3}+3x^{2}-9x}$.

a) Pour tout réel $x$ , déterminer (en justifiant) l’expression de $f'\left(x\right)$.

b) Etudier les variations de la fonction $f$.

3. Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f\left(x\right)=xe^{-x^{2}}$.

a) Pour tout réel $x$ , déterminer (en justifiant) l’expression de $f'\left(x\right)$.

b) Existe t’il des points en lesquels la tangente à la courbe de $f$ est horizontale ? Justifier.

**Exercice 5 : équations différentielles (4 points)**

**Les questions 1 , 2 , 3 ,4 et 5 sont indépendantes**

1.Résoudre l’équation différentielle (E) : $y’=3y$.

2.Résoudre l’équation différentielle (E) : $3y’-5y=0 et y\left(0\right)=1$.

3.Résoudre l’équation différentielle (E) : 2$y’+3y=7 et y\left(1\right)=2$.

4.Soit la fonction $f$ définie sur ℝ par $f\left(x\right)=2e^{-4x}-\frac{3}{4}$. Sans justifier , donner une équation différentielle vérifiée par la fonction $f$.

5.Soit l’équation différentielle (E) : $xy’ +2y=x-1$

On suppose que la fonction $p$ définie sur ℝ par $p(x)=ax+b$ est solution de l’équation différentielle (E). Déterminer la valeur de $a$ et de $b$. (la dérivabilité de $p$ est admise)