Devoir surveillé numéro 1 (jeudi 03/10/2024)

Consignes : L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : QCM (2,5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées : une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1.La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

2.La suite (u_n) définie par $u_n = n(-1)^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

3.La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

4.Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 5^n$. On pose $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

a) S=$\frac{3-3\times5^{10}}{1-5}$
b) S=$\frac{3-3\times5^{11}}{1-5}$
c) S=$\frac{3-3\times5^{10}}{1-3}$
d) S=$\frac{3-3\times5^{11}}{1-3}$

5.Soit l'équation différentielle $2y' - 4y = 5 \; et \; y(0) = 2$.

La solution de cette équation différentielle est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 2e^{2x} - \frac{5}{4}$
b)$f(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}$
c)$f(x) = \frac{13}{4}e^{2x} - \frac{5}{4}$
d)$f(x) = \frac{5}{2}x + 2$

Exercice 2 :étude d'une suite arithmético - géométrique (6 points)

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur remarque que, chaque année, 14% de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 contrats sont résiliés.
En 2020, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année *2020+n.*
Ainsi, on a $u_0 = 120$.
1. Déterminer le nombre de contrats d'entretien en 2021.

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$
2.Le programme Python ci-dessous permet d'afficher dans une liste les n premiers termes de la suite (u_n).(c'est-à-dire de u_0 à u_{n-1}).Compléter ce programme.

```
def liste(n) :
    u=120
    L=[u]
    for ……………………………….………..(1,…….) :
        u=……….
        L=………
    return(L)
```

3. On rappelle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$ et $u_0 = 120$.
On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 50$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$$
c) Retrouver ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

4. a)Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 9{,}8 \times 1{,}14^n$

b) En déduire que la suite (u_n) est croisssante.

5. Compte tenu de ses capacités structurelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. En quelle année, l'entreprise devra t'elle embaucher davantage de personnel ? *Toute prise d'initiative est valorisée.*

<u>Exercice 3 : raisonnement par récurrence (3 points)</u>

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 2$ et $u_0 = 20$.
1.Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 10$.

2.Démontrer , à l'aide du raisonnement de votre choix, que la suite (u_n) est décroisssante.

<u>Formulaires de dérivées</u> *u* et *v* sont **dérivables** sur I

Fonction *f*	Dérivée *f'*	condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
u^2	$2u'u$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	pour tout $x \in$ I, $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	pour tout $x \in$ I, $v(x) \neq 0$

Fonction f	Dérivée f'	condition
$g(ax+b)$	$ag'(ax+b)$	
$v \circ u$ ou $v(u(x))$	$v' \circ u \times u'$ ou $v'(u(x)) \times u'(x)$	
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $n \leq -1$, $u(x) \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Pour tout $x, u(x) > 0$
e^u	$u'e^u$	
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	
$sin(u)$	$u'cos(u)$	

<u>Exercice 4 : calcul de dérivées (4,5 points)</u>

Dans cet exercice, la dérivabilité des fonctions sera admise.

Les questions 1 , 2 et 3 sont indépendantes

1.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$.

Pour tout réel x , déterminer (en justifiant) l'expression de $f'(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3+3x^2-9x}$.

a) Pour tout réel x , déterminer (en justifiant) l'expression de $f'(x)$.

b) Etudier les variations de la fonction f.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.

a) Pour tout réel x , déterminer (en justifiant) l'expression de $f'(x)$.

b) Existe t'il des points en lesquels la tangente à la courbe de f est horizontale ? Justifier.

<u>Exercice 5 : équations différentielles (4 points)</u>

Les questions 1 , 2 , 3 ,4 et 5 sont indépendantes

1.Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

2.Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' - 5y = 0 \ et \ y(0) = 1$.

3.Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 7 \ et \ y(1) = 2$.

4.Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x} - \frac{3}{4}$. Sans justifier , donner une équation différentielle vérifiée par la fonction f.

5.Soit l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = x - 1$

On suppose que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle (E). Déterminer la valeur de a et de b. (la dérivabilité de p est admise)