Correction du devoir surveillé numéro 1 (jeudi 03/10/2024)

Exercice 1 : QCM (2,5 points)

1.La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

2.La suite (u_n) définie par $u_n = n(-1)^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

3.La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

a) La suite (u_n) est majorée et non minorée
b) La suite (u_n) est minorée et non majorée
c) La suite (u_n) est bornée
d) La suite (u_n) n'est ni minorée ni majorée

4.Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 5^n$. On pose $S = u_0 + u_1 + \ \dots + u_{10}$.

a) S=$\frac{3-3\times5^{10}}{1-5}$
b) S=$\frac{3-3\times5^{11}}{1-5}$
c) S=$\frac{3-3\times5^{10}}{1-3}$
d) S=$\frac{3-3\times5^{11}}{1-3}$

5.Soit l'équation différentielle $2y' - 4y = 5 \ et \ y(0) = 2$.

La solution de cette équation différentielle est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 2e^{2x} - \frac{5}{4}$
b)$f(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}$
c)$f(x) = \frac{13}{4}e^{2x} - \frac{5}{4}$
d)$f(x) = \frac{5}{2}x + 2$

Exercice 2 :étude d'une suite arithmético - géométrique (6,5 points)

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur remarque que, chaque année, 14% de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 contrats sont résiliés.
En 2020, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année *2020+n*.
Ainsi, on a $u_0 = 120$.
1. Augmenter de 14% revient à multiplier par $1 + \frac{14}{100} = 1{,}14$.
Sans tenir compte des contrats résiliés, pour obtenir le nombre de contrats l'année *2021*, on doit multiplier le nombre de contrats de l'année précédente par 1,14 .Il y aurait $1{,}14 \times u_0$ contrats.
Si on tient compte des 7 contrats résiliés, on dénombre $1{,}14 \times u_0 - 7 = 1{,}14 \times 120 - 7 \approx 130$ contrats l'année *2021*, *(0,5 point)*
On admet que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$
2.Le programme Python ci-dessous permet d'afficher dans une liste les n premiers termes de la suite (u_n).(c'est-à-dire de u_0 à u_{n-1}).Compléter ce programme.

```
def liste(n) :
    u=120
    L=[u]
    for i in range(1,n) :
        u=1.14*u-7
        L=L+[u]   ou L.append(u)
    return(L)
```

(1 point)

3. On rappelle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$ et $u_0 = 120$.
On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 50$.
a) Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ &= 1{,}14u_n - 7 - 50 \\ &= 1{,}14u_n - 57 \quad \text{or } u_n = v_n + 50 \\ &= 1{,}14(v_n + 50) - 57 \\ &= 1{,}14v_n + 57 - 57 \\ &= 1{,}14v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}14$ de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 120 - 50 = 70$. *(1 point)*

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 70 \times 1{,}14^n$
De plus, $u_n = v_n + 50 = 70 \times 1{,}14^n + 50$. *(0,5 point)*

c) *Démontrons* par récurrence que pour tout n, $u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$

Soit P(n) la proposition « $u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$ » n entier naturel

<u>1ère étape :initialisation</u>

vérifions que $P(0)$ est vraie

$u_0 = 120$ et

$70 \times 1{,}14^0 + 50 = 70 + 50 = 120$

$u_0 = 70 \times 1{,}14^0 + 50$

$P(0)$ est donc vraie

<u>2ème étape : hérédité</u>

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k = 70 \times 1{,}14^k + 50$
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 70 \times 1{,}14^{k+1} + 50$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 1{,}14u_k - 7 \\ &= 1{,}14(70 \times 1{,}14^k + 50) - 7 \\ &= 70 \times 1{,}14 \times 1{,}14^k + 1{,}14 \times 50 - 7 \\ &= 70 \times 1{,}14^{k+1} + 57 - 7 \\ &= 70 \times 1{,}14^{k+1} + 50 \end{aligned}$$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n. *(1,25 points)*

4. a)Démontrons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 9{,}8 \times 1{,}14^n$

Pour tout entier naturel *n* ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 70 \times 1{,}14^{n+1} + 50 - (70 \times 1{,}14^n + 50) \\ &= 70 \times 1{,}14^{n+1} + 50 - 70 \times 1{,}14^n - 50 \\ &= 70 \times 1{,}14^n \times 1{,}14 - 70 \times 1{,}14^n \\ &= 79{,}8 \times 1{,}14^n - 70 \times 1{,}14^n \\ &= 9{,}8 \times 1{,}14^n . \end{aligned}$$ *(1 point)*

b)Or 9,8≥0 et $0{,}5^n \geq 0$. On en déduit que $9{,}8 \times 1{,}14^n \geq 0$.
Ainsi pour tout entier naturel *n* , $u_{n+1} - u_n >\geq 0$
La suite (u_n) est donc croissante. *(0,5 point)*

5. On tabule la suite (u_n) à l'aide de la calculatrice.

n	u_n
0	120
1	129.8
2	140.972
3	153.70808
4	168.2272112
5	184.7790208
6	203.6480837

$u_n > 190$ dès que n≥6.L'entreprise devra embaucher davantage de personnel à partir de l'année 2026.
(0,75 point)

Exercice 3 : raisonnement par récurrence (3 points)

On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel *n* , $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 2$ et $u_0 = 20$.
1.Démontrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 10$.

Soit P(n) la proposition « $u_n \geq 10$ » (n entier naturel)

1ère étape :initialisation

vérifions que $P(0)$ est vraie

$u_0 = 20$ et $20 \geq 10$ $P(0)$ est donc vraie

2ème étape : hérédité

Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \geq 10$.
But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geq 10$

$u_k \geq 10$
$0{,}8 \times u_k \geq 0{,}8 \times 10$
$0{,}8u_k + 2 \geq 8 + 2$
$u_{k+1} \geq 10$

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n. *(1,5 points)*

2. Démontrons de deux façons différentes que la suite u est décroissante.

1ère méthode :signe de $u_{n+1} - u_n$
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 0{,}8u_n + 2 - u_n = -0{,}2u_n + 2$.

Or $u_n \geq 10$
$-0{,}2u_n \leq \underbrace{-0{,}2 \times 2}_{-2}$
$-0{,}2u_n + 2 \leq 0$.
On en déduit donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. *(1,5 points)*

2ème méthode : par récurrence
Soit *P(n)* la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » (n entier naturel).

- **1ère étape :initialisation**
  vérifions que P(0) est vraie.
  $u_0 = 20$, $u_1 = 0{,}8 \times 20 + 2 = 18$ On a bien $u_1 \leq u_0$.

- **2ème étape : hérédité**
  Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_k$.
  But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+2} \leq u_{k+1}$

$u_{k+1} \leq u_k$
$0{,}8u_{k+1} \leq 0{,}8u_k$
$0{,}8u_{k+1} + 2 \leq 0{,}8u_k + 2$
$u_{k+2} \leq u_{k+1}$
P(k+1) est vraie

Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
La suite (u_n)est donc **décroissante**. *(1,5 points)*

Exercice 4 : calcul de dérivées (4,5 points)
Dans cet exercice, la dérivabilité des fonctions sera admise. (bonus dérivabilité: 0,5 pt)
1.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$.
f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\sqrt{u}$ où u *est* dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.

- $f = \sqrt{u}$
- $u(x) = e^x + 1$ $u'(x) = e^x$
- $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$ *(0,75 point)*

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3+3x^2-9x}$.
a)
f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme e^u où u *est* dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f = e^u$
- $u(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ $u'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
- $f' = u'e^u$

Pour tout réel x , $f'(x) = (3x^2 + 6x - 9)e^{x^3+3x^2-9x}$ *(0,75 point)*

b) $e^{x^3+3x^2-9x} > 0$. On en déduit que $f'(x)$ est du signe de la fonction du second degré $3x^2 + 6x - 9$.

$a = 3 \quad b = 6 \quad c = -9$

$\Delta = \quad 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$

$\Delta > 0$ donc le polynome du second degré $3x^2 + 6x - 9$ a deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3} = -3$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$
$3x^2 + 6x - 9$ est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	*0*	-	*0*	+	
$f'(x)$		↗	e^{27}	↘	e^{-5}	↗	

f est croissante sur]-∞ ;-3] et [1 ;+∞[et décroissante sur [-3 ;1]   *(1 point)*

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.
a) f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $f = u \times v$
- $u(x) = x \qquad v(x) = e^{-x^2}$
  $u'(x) = 1 \qquad v'(x) = (-x^2)'^{e^{-x^2}} = -2xe^{-x^2}$
- $f' = u' \times v + u \times v'$

Pour tout réel x,

$f'(x) = 1e^{-x^2} + x \times -2xe^{-x^2}$

$= 1e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$= (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.   *(1,25 points)*

b) Existe t'il des points en lesquels la tangente à la courbe de f est horizontale ? Justifier.

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse x est horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ou\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

La tangente à la courbe de f est horizontale en les points d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et seulement en ces points là. *(0,75 point)*

Exercice 5 : équations différentielles (4 points)

1.Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{3x}, C \in \mathbb{R}$. *(0,5 point)*

2.Résolvons l'équation différentielle (E) : $3y' - 5y = 0 \; et \; y(0) = 1$.

$3y' - 5y = 0 \Leftrightarrow \quad 3y' = 5y \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{5}{3}y$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{5}{3}x}, C \in \mathbb{R}$.

$f(x) = Ce^{\frac{5}{3}x}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{5}{3}\times 0} = C$

Or, $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ Et donc : $f(x) = e^{\frac{5}{3}x}$ *(1 point)*

3.Résolvons l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 7 \; et \; y(1) = 2$.

$2y' + 3y = 7 \Leftrightarrow \quad 2y' = -3y + 7 \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{3}{2}y + \frac{7}{2} \quad a = -\frac{3}{2} \;\; b = \frac{7}{2}$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{7}{2}}{\frac{-3}{2}} = \frac{7}{3}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}, C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 7$sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{3}, C \in \mathbb{R}$$

$f(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{3}$

$f(1) = 2 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{3}{2}} + \frac{7}{3} = 2 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}$

Et donc : $f(x) = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}(1-x)} + \frac{7}{3}$ *(1 point)*

4.Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x} - \frac{3}{4}$.

Une équation différentielle vérifiée par la fonction f est $y' = -4y - 3$ et $y(0) = \frac{5}{4}$*(0,5 point)*

5.Soit l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = x - 1$

On suppose que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle (E). Déterminer la valeur de a et de b. (la dérivabilité de p est admise)

p solution de (E) équivaut à pour tout réel x, $xp'(x) + 2p(x) = x - 1$

équivaut à pour tout réel x, $xa + 2(ax + b) = x - 1$

équivaut à pour tout réel x, $3ax + 2b = x - 1$

équivaut à $3a = 1 \; et \; 2b = -1$

équivaut à $a = \frac{1}{3} \; et \; b = -\frac{1}{2}$ $\quad p(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$. *(1 point)*