**Devoir surveillé numéro 2 (vendredi 29/11/2024)**

**Consignes : L’usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront**

**pour une part importante dans l’appréciation des copies.**

**Le devoir est noté sur 25 puis ramené à 20.**

**Exercice 1 : étude de limites (4 points)**

*Les questions sont indépendantes.*

1.Etudier.

2.Etudier.

3.Etudier.

4.Etudier

4.Etudier *.*

**Exercice 2: croissance comparée (3 points)**

*Les questions sont indépendantes.*

On rappelle les limites dites de « croissance comparée » :

a) et pour tout entier ,

b) et pour tout entier ,

3. Etudier

**Exercice 3 :limites -asymptotes (2,5 points)**

Soit la fonction définie sur ]0 ;+∞[ par

Prouver à l’aide de deux études de limites que la courbe de la fonction admet deux asymptotes dont on donnera une équation.

**Exercice 4 : vrai-faux à justifier (4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la fonction $f$définie sur $\R$par : $f(x)=5 x \mathrm{e}^{-x}$.   
On note $C_{f}$la courbe représentative de $f$dans un repère orthonormé.   
  
**Affirmation 1 :**  
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $C_{f}$.   
  
**Affirmation 2 :**  
La fonction $f$est solution sur $\R$de l'équation différentielle $(E): y'+y=5e^{-x}$.

On suppose que est une fonction concave

**Affirmation 3 :**

Pour tout réel

**Exercice 5 : équations différentielles (4 points)**

**Les questions 1 , 2 , 3 ,4 et 5 sont indépendantes**

1.Résoudre l’équation différentielle (E) : .

2.Résoudre l’équation différentielle (E) : .

3.Soit la fonction définie sur ℝ par . Sans justifier , donner une équation différentielle vérifiée par la fonction .

4.Soit l’équation différentielle (E) :

a) On suppose que la fonction définie sur ℝ par est solution de l’équation différentielle (E). Déterminer la valeur de et de . (la dérivabilité de est admise)

b) Résoudre l’équation différentielle (E).

**Exercice 6 : équations différentielles (3,5 points)**

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.   
On s’intéresse à l’évolution de la température d’une baguette après sa sortie du four.   
On admet qu’on peut modéliser cette évolution à l’aide d’une fonction définie et dérivable sur l’intervalle [0 ;+∞[  
Dans cette modélisation,  représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée , exprimée en heure, après la sortie du four.   
Ainsi, représente la température d’une baguette une demi-heure après la sortie du four.   
Dans tout l’exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.   
On admet alors que la fonction  est solution de l'équation différentielle   
1.a)Préciser la valeur de

b) Démontrer que pour tout réel , on a

2.Par expérience, on observe que la température d’une baguette sortant du four :

* 1. décroît ;
  2. tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ? Justifier précisément chacune de ces observations.

3.Démontrer que l’équation admet une unique solution α dans [0 ;+∞[.

Déterminer une valeur approchée de α à près. Donner une interprétation de ce nombre.

**Exercice 7 : convexité (4 points)**

Soit la fonction définie sur [1 ;5] par

1.On admet que est dérivable sur [1 ;5]. Donner sans justifier puis

2.Démontrer que est strictement croissante sur [1 ;5].

3. Prouver que l’équation admet une unique solution sur [1 ;5].

4.Résoudre dans [1 ;5] , l’équation

5.Etudier (éventuellement sous la forme d’un tableau) la convexité de la fonction sur [1 ;5].

6. représente la valeur en dollar d’une unité de la cryptomonnaie « moneyforever » au bout de années. La référence de temps est l’année 2020. Interpréter concrètement le résultat de la question 5.

![\[\psset{xunit=5cm,yunit=0.025cm,labelFontSize=\scriptstyle,comma=true,labelsep=0.1pt}
\begin{pspicture}(-0.4,-20)(2.50,260)
\multido{\n=0.0+0.1}{23}{\psline[linewidth=0.3pt,linecolor=lightgray](\n,-20)(\n,260)}
\multido{\n=0+20}{14}{\psline[linewidth=0.3pt,linecolor=lightgray](0,\n)(2.1,\n)}
\psaxes[linewidth=0.95pt,Dx=0.5,Dy=20]{->}(0,0)(0,0)(2.1,260)
\psplot[linewidth=1.25pt,linecolor=blue,plotpoints=5000]{0}{2.1}{2.71828 x 6 mul neg   exp 200 mul 25 add}
\uput[d](1.75,-15){\footnotesize Dur\'ee en heure}
\uput[r](0,250){\footnotesize Temp\'erature en degr\'e Celsius}
\uput[ur](0.3,60){\blue $\mathcal{C}_f$}
\end{pspicture}\]](data:image/png;base64,)