Devoir surveillé numéro 2 (vendredi 29/11/2024)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le devoir est noté sur 25 puis ramené à 20.

Exercice 1 : étude de limites (4 points)

Les questions sont indépendantes.

1.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

2.Etudier $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1}$.

3.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2+1}$.

4.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sin(x)$

4.Etudier $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2}$.

Exercice 2: croissance comparée (3 points)

Les questions sont indépendantes.

On rappelle les limites dites de « croissance comparée » :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

1. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$
2. Etudier $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x$
3. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

Exercice 3 :limites -asymptotes (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{e^x-1}$

Prouver à l'aide de deux études de limites que la courbe de la fonction f admet deux asymptotes dont on donnera une équation.

Exercice 4 : vrai-faux à justifier (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5xe^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-x}$.

On suppose que g est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ et $g(1) = 2$ et $g'(1) = 3$.

Affirmation 3 :

Pour tout réel x , $g(x) \leq 3x - 1$.

<u>Exercice 5 : équations différentielles (4 points)</u>

Les questions 1 , 2 , 3 ,4 et 5 sont indépendantes

1.Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -2y$.

2.Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 5y = 0 \; et \; y(0) = 1$.

3.Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{5x} + \frac{4}{5}$. Sans justifier , donner une équation différentielle vérifiée par la fonction f.

4.Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x - 1$

a) On suppose que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle (E). Déterminer la valeur de a et de b. (la dérivabilité de p est admise)

b) Résoudre l'équation différentielle (E).

<u>Exercice 6 : équations différentielles (3,5 points)</u>

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ;+∞[

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0{,}5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1.a)Préciser la valeur de $f(0)$.

b) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.

2.Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ? Justifier précisément chacune de ces observations.

3.Démontrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans [0 ;+∞[.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. Donner une interprétation de ce nombre.

<u>Exercice 7 : convexité (4 points)</u>

Soit f la fonction définie sur [1 ;5] par $f(x) = 2x^2 + 3 - e^{-2x+3}$.

1.On admet que f est dérivable sur [1 ;5]. Donner sans justifier $f'(x)$ puis $f''(x)$.

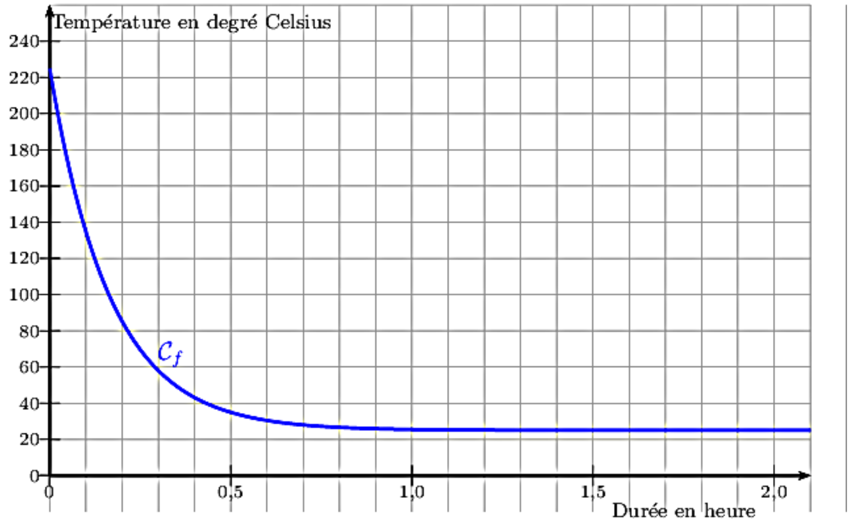
2.Démontrer que f est strictement croissante sur [1 ;5].

3. Prouver que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur [1 ;5].

4.Résoudre dans [1 ;5] , l'équation $4 - 4e^{-2x+3} > 0$.

5.Etudier (éventuellement sous la forme d'un tableau) la convexité de la fonction f sur [1 ;5].

6.$f(x)$ représente la valeur en dollar d'une unité de la cryptomonnaie « moneyforever » au bout de x années. La référence de temps est l'année 2020. Interpréter concrètement le résultat de la question 5.



Température en degré Celsius
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0,5
1,0
1,5
2,0
Durée en heure
$\mathcal{C}_f$