Correction du devoir surveillé numéro 2 (vendredi 29/11/2024)

Exercice 1 : étude de limites (5 points=1+1+1+1+1)

Les questions sont indépendantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 2x + 1 =$?

$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.Donc, par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$ Donc, par limite d'un produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$ soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} =$?

$\frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{x^3}{x^3} \times \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^3} = 0$.

Donc, comme limite de sommes : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^3} = 1$

• Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{1} = 1$ soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = 1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2+1}$.

$$x \longrightarrow -3x^2+1$$
$$X \longrightarrow e^X$$
$$+\infty \qquad -\infty \qquad 0$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2+1} = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sin(x) =$?

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Ainsi , $1 \geq -\sin(x) \geq -1$

donc : $x^2 + 1 \geq x^2 - \sin(x) \geq x^2 - 1$ et

$x^2 - \sin(x) \geq x^2 - 1$ Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \sin(x) = +\infty$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} =$?

Pour tout $x < 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Ainsi: $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Et donc : $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

Or on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} = 1$

Exercice 2: croissance comparée (2 points=1+1 , bonus : 1 point)

Les questions sont indépendantes.

On rappelle les limites dites de « croissance comparée » :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2 = ?$

Pour tout x, $e^x - x^2 = x^2(\frac{e^x}{x^2} - 1)$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Par limite d'un produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2 = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = ?$

pour tout x, $(x^2 - 2x + 1)e^x = x^2e^x - 2xe^x + e^x$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Par limite d'une somme, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 2xe^x + e^x = 0$ soit $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = 0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

$$\frac{e^x+x}{e^x-x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

● Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et de même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Donc, comme inverse de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{x^2}{e^x} = 1$.

● Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = 1$.

Exercice 3 :limites -asymptotes (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{e^x-1}$

- Etudions $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$.

Par conséquent , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{e^x-1} = 3$.

La droite d'équation y=3 est donc asymptote horizontale à la courbe de la fonction f en $+\infty$.

- Etudions $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3 + \frac{1}{e^x-1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x - 1 = 0^+$ $(si\ x > 0\ alors\ e^x > e^0\ soit\ e^x > 1)$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$.Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3 + \frac{1}{e^x-1} = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe de la fonction f.

Exercice 4 : vrai-faux à justifier (4 points=1,25+1,5+1,25)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5xe^{-x}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Etudions $\lim\limits_{x \to +\infty} 5xe^{-x}$

Pour tout réel x, $5xe^{-x} = 5\frac{x}{e^x}$.

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 2 :

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-x}$.

- $f = u \times v$
- $u(x) = 5x$ $\qquad v(x) = e^{-x}$
  $u'(x) = 5$ $\qquad v'(x) = -e^{-x}$
- $f' = u' \times v + u \times v'$

Pour tout réel x, $f'(x) = 5e^{-x} + 5x \times -e^{-x} = (5 - 5x)e^{-x}$.

Pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = (5 - 5x)e^{-x} + 5xe^{-x} = (5 - 5x + 5x)e^{-x} = 5e^{-x}$

L'affirmation est vraie.

On suppose que g est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ et $g(1) = 2$ et $g'(1) = 3$.

Affirmation 3 :

Pour tout réel x , $g(x) \leq 3x - 1$.

Une équation de la tangente à Cg au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

Soit $y = 3(x - 1) + 2$

$y = 3x - 3 + 2$

Soit $y = 3x - 1$.

g est concave sur $\mathbb{R}$ donc Cg est en dessous de chacune de ses tangentes.

On en déduit donc que pour tout x, $g(x) \leq 3x - 1$.

L'affirmation est vraie.

Exercice 5 : équations différentielles (4 points=0,75+1+0,5+1+0,75)

Les questions 1 , 2 , 3 ,4 et 5 sont indépendantes

1.Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -2y$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2.Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 5y = 0$ *et* $y(0) = 1$.

$3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \qquad 3y' = -5y \Leftrightarrow \qquad y' = -\frac{5}{3}y$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$

Donc $f(0) = Ce^{-\frac{5}{3}\times 0} = C$

Or, $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ $\qquad$ Et donc : $f(x) = e^{-\frac{5}{3}x}$

3.Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{5x} + \frac{4}{5}$. Sans justifier , donner une équation différentielle vérifiée par la fonction f.
Une équation différentielle vérifiée par la fonction f est $y' = 5y - 4$ et $y(0) = \frac{19}{5}$

4.Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x - 1$
a) *On suppose que la fonction* p *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $p(x) = ax + b$ *est solution de l'équation différentielle (E). Déterminer la valeur de* a *et de* b. *(la dérivabilité de* p *est admise)*

p solution de (E) équivaut à pour tout réel x, $p'(x) + 2p(x) = 2x - 1$

équivaut à pour tout réel x, $a + 2(ax + b) = 2x - 1$

équivaut à pour tout réel x, $2ax + a + 2b = 2x - 1$

équivaut à $2a = 2$ *et* $a + 2b = -1$
équivaut à $a = 1$ *et* $2b = -2$
équivaut à $a = 1$ *et* $b = -1$ $p(x) = x - 1$

b) Résoudre l'équation différentielle (E).
$y' + 2y = 2x - 1 \Leftrightarrow y' = -2y + x - 1$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y + x - 1$ sont les fonctions de la forme :

$f(x) = Ce^{-2x} + x - 1$, $C \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 6 : équations différentielles (4,5 points=0,25+1,25+0,75+0,75+0,75+0,75)</u>
Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f *définie et dérivable sur l'intervalle* $[0\ ;+\infty[$
Dans cette modélisation, $f(t)$ *représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée* t, *exprimée en heure, après la sortie du four.*
Ainsi, $f(0,5)$ *représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.*
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.
On admet alors que la fonction f *est solution de l'équation différentielle* $y' + 6y = 150$.
1.a) $f(0) = 225$.
b)
$y' + 6y = 150 \Leftrightarrow \quad y' = -6y + 150 \qquad a = -6 \quad b = 150$

● Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -\frac{b}{a} = -\frac{150}{-6} = 25$.
● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -6y$ sont de la forme : $t \longmapsto Ce^{-6t}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = -6y + 150$sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{-6t} + 25, C \in \mathbb{R}$$

$f(0) = 225$ Donc $Ce^0 + 25 = 225$ soit C=225-25=200
Pour tout réel $t \geq 0$, on a donc $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.

2.Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

- *décroît ;*
- *tend à se stabiliser à la température ambiante.*

- Pour tout réel t, $f'(t) = -1200e^{-6t}$

Or -1200<0 et $e^{-6t} > 0$
On en déduit que $f'(t) < 0$.
f est donc décroissante sur [0 ;+∞[.

- $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t}$.

$t \longrightarrow -6t$
$X \longrightarrow e^X$

$+\infty \quad -\infty \quad 0$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -6t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} 200\,e^{-6t} + 25 = 25$ soit $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$.

3.

- f est continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[.
- $40 \in [25; 225]$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 40$ admet une unique solution α sur l'intervalle [10 ;50].

Par balayage , on obtient : 0< α <1 puis 0,4< α <0,5 puis 0,43< α <0,44 et enfin 0,431< α <0,432   α≈0,43   0,43×60≈26
Au bout de 26 minutes, la température du pain est de 40°C.

<u>Exercice 7 : convexité (4,5 points=1+0,75+0,75+0,75+0,75+0,5)</u>

Soit f la fonction définie sur [1 ;5] par $f(x) = 2x^2 + 3 - e^{-2x+3}$.
1.On admet que f est dérivable sur [1 ;5].
Pour tout réel x de [1 ;5], $f'(x) = 4x + 2e^{-2x+3}$ *et* $f''(x) = 4 - 4e^{-2x+3}$

2.Pour tout réel x de [1 ;5], $4x \geq 0$ *et* $2e^{-2x+3} > 0$.
On en déduit que $f'(x) > 0$.
Par conséquent , f est strictement croissante sur [1 ;5].
3.

x	1	5
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$5-e$ ↗	$53-e^{-7}$

- f est continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[.
- $10 \in [5 - e; 53 - e^{-7}]$
- D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ;5].

4. $4-4e^{-2x+3}>0 \Leftrightarrow e^{-2x+3}<1 \Leftrightarrow -2x+3<0 \Leftrightarrow -2x<-3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$

S=]1,5; 5]

5.

x	1		1,5		5
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f est donc convexe sur [1,5 ;5] et concave sur [1 ;1,5].

6.La croissance de la valeur en dollar de la cryptomonnaie a ralenti pendant les 6 premiers mois puis s’est ensuite accélérée.