Devoir surveillé numéro 3 (vendredi 20/12/2024)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le devoir est noté sur 22,5 puis ramener à 20.

Exercice 1 : étude de limites (1+1+1+1+1=5 points)

Les questions sont indépendantes.

1.Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n - 3^n$.

2.Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$.

3.Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$.

4.Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2$.

5. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 - x + 1)$

Exercice 2: limite d'une suite arithmético-géométrique (1,5+1+1=3,5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}5$ et $u_0 = 2$.

1.Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 5$.

2.Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3.Prouver que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : vrai-faux à justifier (1,25+1,25=2,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

<u>Affirmation 1 :</u>

Soit f la fonction définie sur [0 ;5] par $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ .La fonction f admet comme minimum $\ln(3) - \ln(4)$.(on admettra que pour tout réel x de [0 ;5] , $x^2 - x + 1 > 0$)

<u>Affirmation 2 :</u>

L'équation : $\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$ admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Exercice 4 : étude d'une suite arithmético géométrique (0,5+0,5+1+0,75+1+0,25=4 points)

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur remarque que, chaque année, 14% de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 contrats sont résiliés.
En 2023, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année *2023+n.*
Ainsi, on a $u_0 = 120$. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$

1. Compte tenu de ses capacités structurelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
On cherche donc à savoir en quelle année, l'entreprise devra embaucher.
Pour cela, on utilise la fonction Python suivante :

```
def seuil() :
    u = 120
    n =  0
    ……………………………..
        n =   ….
        u =  …..
    return(n)
```

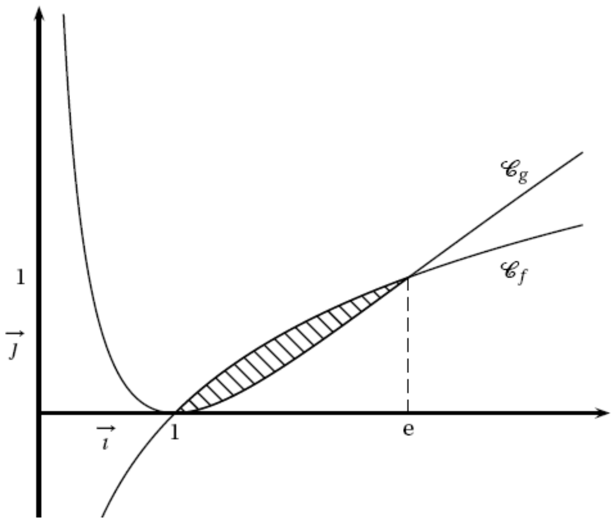
a) Compléter cette fonction python.
b) Quelle valeur est affichée lorsque l'on appelle la fonction seuil ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. On rappelle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$ et $u_0 = 120$.
On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 50$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$$
c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels n , l'inéquation $u_n > 190$.
d) Quel résultat de la question 1, retrouve t'on ?

Exercice 5: un problème d'optimisation(3 points : 0,75 + 0,25 + 0,75 +0,75 +0,5)

Partie A-Préliminaire :
Résoudre dans]0 ;+∞[l'inéquation $1 - 2\ln(x) > 0$.

Partie B-
Les courbes *Cf* et *Cg* ci-dessous représentent respectivement , les fonctions f et g définies sur]0 ;+∞[par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.
On suppose que sur [1 ; *e*] , la courbe *Cf* est au-dessus de la courbe *Cg*.



Pour *x* appartenant à l'intervalle *[1 ;e]*, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse *x* et N le point de la courbe C_g de même abscisse.

1. Donner sans justifier l'expression de la longueur MN en fonction de *x*.
Soit h la fonction définie sur [1 ; *e*] par : $h(x) = ln(x)(1 - ln(x))$
2. Démontrer que pour tout réel *x* de *[1 ;e]* , $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x}$. *(la dérivabilité sera admise)*
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction h.
4. Pour quelle valeur de *x* , la longueur MN est-elle maximale ? Quelle est la longueur maximale ?

Exercice 6: étude d'une fonction (0,5+0,5+0,5 +0,75+0,75+0,75+0,75=4,5 points)

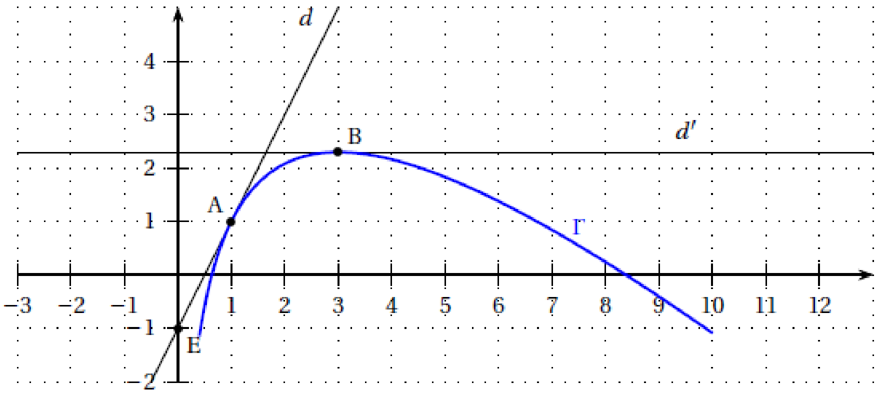
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante*

La fonction f est définie sur l'intervalle [0,5; 10] par :

$$f(x) = ax + 2 + b\ln(x)$$

où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative Γ de la fonction f ;
— la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées (1; 1) ;
— la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :

— la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(0\,;\,-1)$.

— la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de $f'(1)$, puis celle de $f'(3)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x + 2 + 3\ln(x).$$

1. Montrer que pour x dans $[0{,}5\,;\,10]$,
$$f'(x) = \frac{-x+3}{x}.$$
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,3]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.