Nom :

Devoir surveillé numéro 4 (vendredi 31/01/2025)

<u>Consignes :</u> L'usage de la calculatrice est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le devoir est noté sur 22,5 puis ramener à 20.

<u>Exercice 1 : équations – inéquations (1+ 1,5 + 1,25+0,75+0,5+0,5= 5,5 points)</u>

Les questions 1,2,3,4 et 5 sont indépendantes.

1. $e^{2x} + 2e^{x} = 3 \Leftrightarrow (e^{x})^2 + 2e^{x} - 3 = 0$

On fait le changement de variable X=e^x.

. Ainsi X est solution de l'équation du second degré $X^2 + 2X - 3 = 0$.

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

Δ>0 .L'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$ admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

X peut prendre deux valeurs : -3 et 1

$e^x = -3$ ou $e^x = 1$

Or l'équation $e^x = -3$ n'a pas de solutions car $e^x > 0$

$e^x = 1 \quad \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad S = \{0\}$

2.a)

$\lim_{n\to+\infty} 1{,}5^n = +\infty$ car $1{,}5 > 1$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 3 \times 1{,}5^n = +\infty$

Il existe donc un entier à partir duquel $3 \times 1{,}5^n > 100011$.

b) $3 \times 1{,}5^n > 100011$

$\Leftrightarrow 1{,}5^n > 33\,337$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}5^n) > \ln(33\,337)$

$\Leftrightarrow n\ln(1{,}5) > \ln(33\,337)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(33\,337)}{\ln(1{,}5)}$ $\quad (\ln(1{,}5) > 0\ car\ 1{,}5 > 1$ Or, $\frac{\ln(33\,337)}{\ln(1{,}5)} \approx 25{,}69$

$\Leftrightarrow n \geq 26$

Le plus petit entier n à partir duquel $3 \times 1{,}5^n > 100011$ est 26.

3. Résoudre l'inéquation : $ln(x+1) + ln(x-1) > ln(4)$.

L'inéquation a un sens si $x + 1 > 0\ et\ x - 1 > 0$

Soit $x > -1\ et\ x > 1$

Soit $x > 1 \qquad$ D=]1; +∞[

$ln(x-1) + ln(x+1) > \ln(4) \Leftrightarrow \ln\big((x-1)(x+1)\big) > \ln(4)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 4$

$\Leftrightarrow x^2 > 5$

$\Leftrightarrow x > \sqrt{5}$ ou $x < -\sqrt{5}$

(impossible compte tenu du domaine de définition D)

S=]$\sqrt{5}$; +∞[

Nom :

4. Résoudre dans R , l'équation $sin(x) = \frac{1}{2}$.

Les solutions de l'équation $sin(x) = \frac{1}{2}$ sont les réels du type $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où k décrit$\mathbb{Z}$.

5.a) Résoudre dans $[0; 2\pi]$, l'inéquation $cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S =]0; \frac{\pi}{4}[\cup] \frac{11\pi}{4} ; 2\pi]$

b) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S =] - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

Exercice 2 : dénombrement (0,5+0,5+0,5 + 1+0,5 =3 points)

Les questions 1 ,2 et 3 sont indépendantes.

1.Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

a)On tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne et on note à chaque tirage le numéro obtenu.

On cherche le nombre de 5 uplets d'un ensemble qui comporte 20 éléments soit 20^5

Il y a donc 3 200 000 tirages possibles

b) On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne et on note à chaque tirage le numéro obtenu.

On cherche le nombre de 5 uplets d'éléments distincts d'un ensemble qui comporte 20 éléments soit $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$.

Il y a donc 1 860 480 tirages possibles

c)On tire simultanément (sans tenir compte de l'ordre) 5 boules de l'urne et on note l'ensemble des numéros tirés.

On cherche le nombre de combinaisons de 5 éléments d'un ensemble qui comporte 20 éléments.

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,(20-5)!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15\,504$$

Il y a donc 15 504 tirages possibles

2.Un professeur de Spé Maths s'intéresse à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité Physique-Chimie
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES
- 1 élève a choisi LLCE espagnol

Il veut former un groupe de 5 élèves comportant 3 élèves ayant choisi la spécialité SES .

Il faut choisir ces 3 élèves parmi les 20 qui ont choisi la spécialité SES et les 2 autres parmi les 11 élèves restants.

Il y a donc $\binom{21}{3} \times \binom{10}{2} = 1330 \times 45 = 59\,850$ de façons différentes de former un tel groupe .

3. $\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100\times99\times98!}{2\times1\times98!} = \frac{9900}{2} = 4950.$

Exercice 3 : loi binomiale (1 + 0,75 +0,5+0,75+0,5=3,5 points)

Les résultats seront arrondis à 3 décimales

1. On répète 20 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli :

(le bulbe germe (succès) ; la **probabilité du succès** est égale à $0{,}77$)

Cette expérience est un **schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}77$.**

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 20$ et $p = 0{,}77$ $soit$ $B(20; 0{,}77)$

2. $P(X = 12) = \binom{20}{12} 0{,}77^{12}(1 - 0{,}77)^{20-12} = 125\,970 \times 0{,}77^{12} \times 0{,}23^8 \approx 0{,}043$

La probabilité qu'exactement 12 bulbes choisis germent est 0,043.

Nom :

3. $P(X \leq 12) \approx 0{,}067$
La probabilité qu'au plus 12 bulbes germent est 0,067.

4.Le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) > 0{,}95$ est 18.
Il y a plus de 95% de chances qu'au plus 18 bulbes germent.

4. $E(X) = np = 20 \times 0{,}77 = 15{,}4$
En moyenne, sur un prélèvement de 20 bulbes, 15,4 bulbes vont germer.

Exercice 4 : recherche d'un seuil (0,5 + 1 +1= 2,5 points)

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et 0,036.

2.a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}036^0 (1 - 0{,}036)^{n-0} = 1 - 0{,}964^n$.

b)On résout l'inéquation $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

$\Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}964^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow -0{,}964^n \geq -0{,}01$

$\Leftrightarrow 0{,}964^n \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}964^n) \leq \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \ln(0{,}964) \leq \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)}$ $\quad (\ln(0{,}964) < 0 \; car \; 0{,}964 < 1)$ Or, $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)} \approx 125{,}6$

$\Leftrightarrow n \geq 126$ Donc, il faut commander 126 casques pour qu'au moins un ait un défaut avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 5 :étude d'une fonction trigonométrique (0,5 + 0,5 +0,5+0,75+1,5+0,75=4,5 points)

1.Pour tout réel x,

$f(-x) = sin^2(-x) + \cos(-x)$ or $sin(-x) = -sin(x)$ et $cos(-x) = cos(x)$

$= (-\sin(x))^2 + \cos(x)$

$= sin^2(x) + \cos(x)$

$= f(x)$ $\quad f$ est donc paire.

2.Pour tout réel x,

$f(x + 2\pi) = sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi)$ or $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
et $cos(x + 2\pi) = cos(x)$

$= sin^2(x) + \cos(x)$

$= f(x)$ $\quad f$ est donc 2π périodique.

3. f étant 2π périodique, on peut donc étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π c'est-à-dire $[-\pi\,; \pi]$.
f étant $paire$, on peut donc étudier f sur un intervalle d'amplitude π c'est-à-dire $[0\,; \pi]$.
Connaissant la courbe de f sur $[0\,; \pi]$, on peut déterminer la courbe de f sur $[-\pi; 0]$ à l'aide de la symétrie d'axe l'axe des ordonnées.
Connaissant la courbe de f sur $[-\pi\,; \pi]$, on peut déterminer la courbe de f sur les autres périodes à l'aide de translations successives de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Nom :

4. Pour tout réel x,

$f'(x) = 2\sin(x)\,sin'(x) + (-\sin(x)) \qquad (u^2)' = 2u'u$

$= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)$

$= \sin(x)(2\cos(x) - 1)$

Sur $[0\,;\pi]$:

$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) > 1 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \qquad S = [0\,;\frac{\pi}{3}[$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$2\cos(x) - 1$		$+$	0	-	
$f'(x)$	0	$+$	0	-	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

f est strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$ et est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{3}\,;\pi]$.

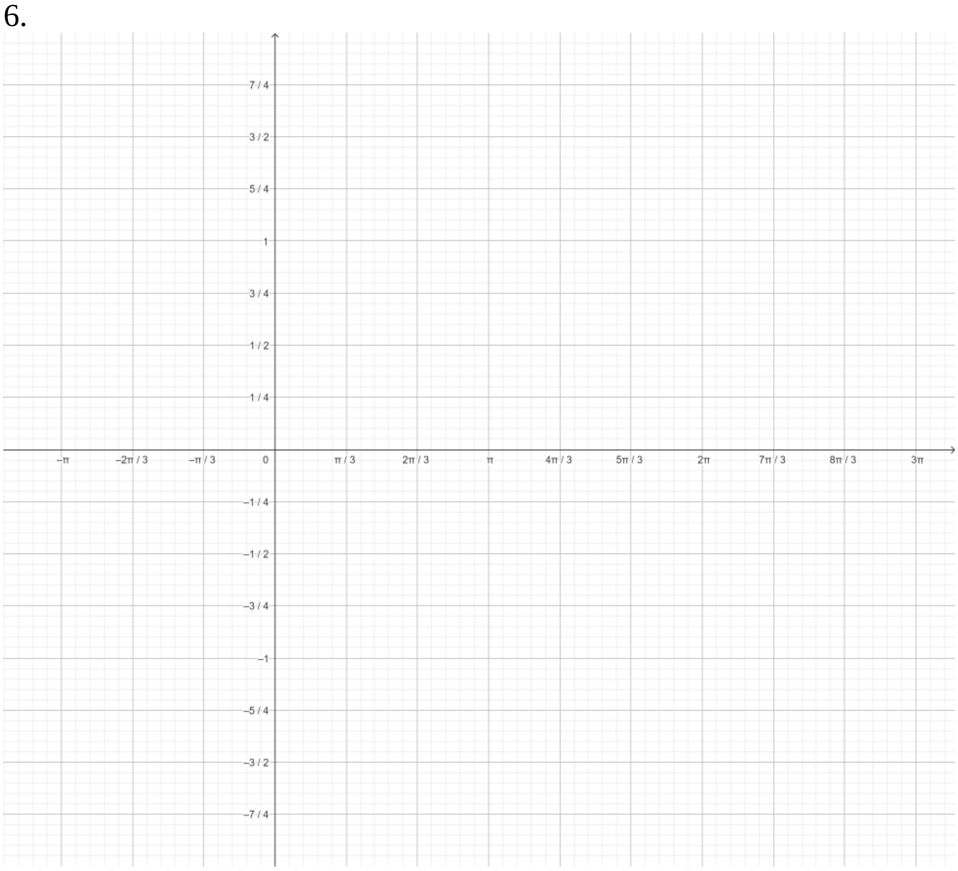
$$f(0) = \cdots = 1$$

$$f(\pi) = \cdots = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cdots = \frac{1}{4}$$

6.



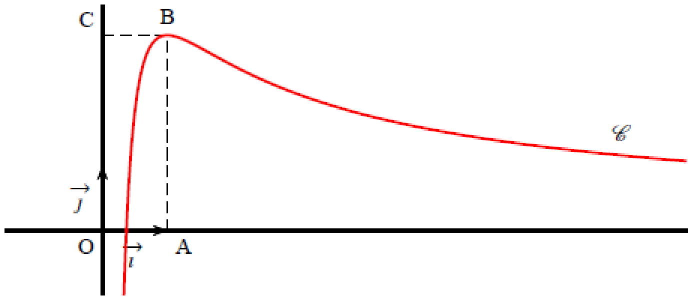
Nom :

Exercice 6 : la fonction inconnue- point d'inflexion (0,5+0,75+0,75 + 1,5 =3,5points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 3), (0 ; 3) ;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$

1. $f(1) = 3 \ \ et f'(1) = 0$

2.

$*f = \frac{u}{v}$

$*u(x) = a + bln(x) \quad u'(x) = b \times \frac{1}{x}$

$v(x) = \ x \qquad v'(x) = 1$

$*f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour tout x>0, $f(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + bln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - bln(x)}{x^2}$

2. $f(1) = 3 \ \ et f'(1) = 0$

On en déduit que $\frac{a+bln(1)}{1} = 3$ et $\frac{b-a-bln(1)}{1^2} = 0$

Soit $a = 3$ et $b - a = 0$.

On en déduit que $a = b = 3$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $0; +\infty$ par $f(x) = \frac{3+3ln(x)}{x}$.

On admet également que $f'(x) = \frac{-ln(x)}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{-1+2ln(x)}{x^3}$

La fonction f admet elle un point d'inflexion ? Justifier.

On étudie le signe de $f''(x)$.

Comme $x > 0$, alors $x^3 > 0$

Ainsi $f''(x)$ est du signe de $-1 + 2ln(x)$.

Nom :

$$-1 + 2ln(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	+	0	-	
$f'(x)$	‖	↗		↘	

La fonction f est donc convexe sur]0 ; $\sqrt{e}$] et concave sur [$\sqrt{e}$;+∞[.
Il est donc clair que le point de d'abscisse $\sqrt{e}$ est un point d'inflexion à la courbe de f (la dérivée seconde s'annule et change de signe en cette valeur)

Le point d'inflexion est le point de coordonnées ($\sqrt{e}$; $\frac{9}{2\sqrt{e}}$)